

Rappelons que deux *expressions algébriques* sont *équivalentes* si et seulement si elles associent les mêmes *valeurs* aux mêmes valeurs des *variables*. Ainsi par exemple : $2x + 3x$ et $12x - 7x$ ont toujours la même valeur, quelle que soit la valeur de la variable x .

Ce qu'on note :

$$2x + 3x = 12x - 7x$$

Les *transformations algébriques* qui nous occupent dans ce chapitre permettent de passer d'une expression algébrique à une expression équivalente.

1 Évaluer

1 Parmi les *expressions algébriques* suivantes :

- indiquez celles qui sont *équivalentes*
- évaluez ces expressions pour $a = +2$, $b = -3$

- | | | |
|-----------------|------------------------|-------------------|
| 1. $-a$ | 2. $-b + 1$ | 3. $-(-a)$ |
| 4. $-(-b) + 1$ | 5. $(-1) \cdot a$ | 6. $a \cdot (-1)$ |
| 7. $-1 \cdot a$ | 8. $-(-1 \cdot b) + 1$ | 9. $b + 1$ |

2 Parmi les *expressions algébriques* suivantes :

- indiquez celles qui sont *équivalentes*
- évaluez ces expressions pour $a = +2$, $b = -3$

- | | | |
|---------------|---------------|-------------|
| 1. $a + b$ | 2. $a - b$ | 3. $-a + b$ |
| 4. $-a - b$ | 5. $2a + b$ | 6. $a + 2b$ |
| 7. $-2a - 3b$ | 8. $-3a + 2b$ | |

3 Parmi les *expressions algébriques* suivantes :

- indiquez celles qui sont *équivalentes*
- évaluez ces expressions pour $a = 5$, $b = -4$

- | | | |
|-----------------------|---------------------|---------------------------|
| 1. $a \cdot b$ | 2. ba | 3. $a \cdot (-b)$ |
| 4. $(-b) \cdot a$ | 5. $2a \cdot b$ | 6. $a \cdot 2b$ |
| 7. $2 \cdot ab$ | 8. $2ab$ | 9. $(-a) \cdot b$ |
| 10. $(-a) \cdot (-b)$ | 11. $-1 \cdot ab$ | 12. $-ab$ |
| 13. $\frac{a}{b}$ | 14. $\frac{a}{-b}$ | 15. $\frac{-a}{b}$ |
| 16. $\frac{-a}{-b}$ | 17. $\frac{4a}{2b}$ | 18. $2 \cdot \frac{a}{b}$ |

4 Parmi les *expressions algébriques* suivantes :

- indiquez celles qui sont *équivalentes*
- évaluez ces expressions pour $a = 5$, $b = -1$

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. $2a^2 - b^3$ | 2. $(-a)^2 - 2b^3$ |
| 3. $a^2 - 2 \cdot b^3$ | 4. $-a^2 - (2 \cdot b)^3$ |
| 5. $(2 \cdot a)^2 + (-b)^3$ | 6. $(2a) \cdot a - b \cdot b^2$ |

2 Réduction de termes semblables

5 Dans les *expressions algébriques* suivantes, réduisez les termes semblables :

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $a + a$ | 2. $a - a$ |
| 3. $2a + 3a$ | 4. $2a - 3a$ |
| 5. $x + x$ | 6. $x - x$ |
| 7. $2x + 3x$ | 8. $2x - 3x$ |
| 9. $ab + ab$ | 10. $ab - ab$ |
| 11. $2ab + 3ab$ | 12. $2ab - 3ab$ |
| 13. $a^2 + a^2$ | 14. $a^2 - a^2$ |
| 15. $2a^2 + 3a^2$ | 16. $2a^2 - 3a^2$ |
| 17. $a^2b + a^2b$ | 18. $a^2b - a^2b$ |
| 19. $2a^2b + 3a^2b$ | 20. $2a^2b - 3a^2b$ |

6 Transformez les *expressions algébriques* suivantes en des expressions aussi simples, aussi « compactes » que possible.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $a + a + a$ | 2. $(a + a) + (2a + a)$ |
| 3. $a - a + a$ | 4. $(a + 2a) - (2a - 5a)$ |
| 5. $2 \cdot (3a)$ | 6. $3 \cdot (2a)$ |
| 7. $3 \cdot (2a + a)$ | 8. $5 \cdot (4a - 2a) - a$ |
| 9. $a - 2 \cdot (a + 2a)$ | 10. $3 \cdot (-2a) - a$ |
| 11. $a^2b + a^2b + a^2b$ | 12. $(a^2b + a^2b) + (2a^2b + a^2b)$ |
| 13. $a^2b - a^2b + a^2b$ | 14. $(a^2b + 2a^2b) - (2a^2b - 5a^2b)$ |
| 15. $2 \cdot (3a^2b)$ | 16. $3 \cdot (2a^2b)$ |
| 17. $3 \cdot (2a^2b + a^2b)$ | 18. $5 \cdot (4a^2b - 2a^2b) - a^2b$ |
| 19. $a^2b - 2 \cdot (a^2b + 2a^2b)$ | 20. $3 \cdot (-2a^2b) - a^2b$ |

7 Transformez les *expressions algébriques* suivantes en des expressions aussi simples, aussi « compactes » que possible.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| 1. $x \cdot x$ | 2. $x \cdot x \cdot x$ | 3. $x \cdot x \cdot y$ |
| 4. $x \cdot y \cdot y \cdot y$ | 5. $2 \cdot x \cdot x$ | 6. $2 \cdot x \cdot 3 \cdot x$ |
| 7. $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$ | 8. $2x \cdot yx \cdot xy$ | 9. $(-2x) \cdot (-2x)$ |

8 Réduisez les termes semblables.

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $9 + 2x - 3 + 5x$ | 2. $9 + 2x^2 - 3 + 5x^2$ |
| 3. $9 + 2xy - 3 + 5xy$ | 4. $9 + 2x^2y - 3 + 5x^2y$ |
| 5. $9 + 2ab^2 - 3 + 5ab^2$ | 6. $9 + 2a - 3 + 5a$ |

9 Réduisez les termes semblables.

1. $9 + 2 \cdot (a + b) - 3 + 5 \cdot (a + b)$
2. $9 + 2 \cdot (3a + b) - 3 + 5 \cdot (3a + b)$
3. $9 + 2 \cdot (3a - 2b) - 3 + 5 \cdot (3a - 2b)$
4. $9 + 2 \cdot (a^2 + b) - 3 + 5 \cdot (a^2 + b)$
5. $9 + 2 \cdot (a - b) - 3 + 5 \cdot (a - b)$

3 Parenthèses — Règles de priorité

10 Supprimez dans les expressions suivantes les parenthèses « inutiles » (sans pour autant changer les opérateurs).

1. $a + (b + (c + d))$
2. $a - (b + (c + d))$
3. $a - (b - (c + d))$
4. $(a + b) + (c + d)$
5. $(a + b) - (c + d)$
6. $((a + b) - c) + d$
7. $a + (b + c) - d$
8. $a - (b + c) - d$

11 Supprimez dans les expressions suivantes les parenthèses « inutiles » (mais ne changez pas les opérateurs).

1. $a \cdot (b + c)$
2. $(a \cdot b) + c$
3. $(a \cdot b) \cdot c$
4. $(a + b) \cdot c$
5. $a + (b \cdot c)$
6. $a \cdot (b \cdot c)$
7. $a - (b \cdot c)$
8. $(a - b) \cdot c$
9. $a + b \cdot (c + d)$
10. $a + (b \cdot c) + d$

4 Opposé d'une somme, d'un produit

12 Supprimez les parenthèses dans les expressions suivantes :

1. $x - (y + z)$
2. $x - (y - z)$
3. $x - (-y + z)$
4. $x - (-y - z)$
5. $-(x - y) - z$
6. $-(-x - y) + z$
7. $-(-x + y) - z$
8. $-(x + y) + z$

13 Déterminez pour chacune des expressions suivantes, l'expression *opposée*.

1. $a + 3$
2. $7 + x$
3. $7 - x$
4. $a - 5$
5. $2a - 7$
6. $7 - 2a$
7. $a + b - 17$
8. $a + b + 17$
9. $a - b + 17$
10. $-a + b - 17$
11. $-a - b + 17$
12. $-a - b - 17$

14 Exprimez *en fonction* du produit $x \cdot y$:

1. $x \cdot (-y)$
2. $(-x) \cdot y$
3. $(-x) \cdot (-y)$
4. $-(-x) \cdot [-(-y)]$
5. $(2x) \cdot y$
6. $x \cdot (2y)$
7. $-3 \cdot (2x) \cdot y$
8. $-3 \cdot (2x) \cdot (-4y)$

5 Développements

Développer une expression algébrique, c'est essentiellement *transformer un produit de facteurs en une somme de termes* en utilisant au besoin la *distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Après avoir développé une expression algébrique, on effectue une *réduction des termes semblables*.

15 Développez les expressions suivantes (en utilisant la *propriété de distributivité*).

1. $2 \cdot (a + 1)$
2. $3 \cdot (2 + x)$
3. $(x + 1) \cdot 2$
4. $(3 + a) \cdot 3$
5. $2a \cdot (x + 2)$
6. $7 \cdot (a - 3)$
7. $2a \cdot (x - 1)$
8. $a \cdot (b + c)$
9. $a(x + y)$
10. $(a - b)x$
11. $3a(x + 2y)$
12. $(2a - 3b)x$
13. $3(2x + 5)$
14. $4a(3 - 2x)$
15. $5x \cdot (a - 2)$
16. $4(1 + x - y)$
17. $(2a + 3b) \cdot 5x$
18. $(a - b + c)x$
19. $2 \cdot (3a - 4b + 5)$
20. $3a(2 - 3x + 4y)$
21. $5x \cdot (p - 2q + a - 2b)$
22. $4ab(x - 2y)$
23. $(a + b + c) \cdot x$
24. $a(x + y + z)$

16 Développez les expressions suivantes (en utilisant la *propriété de distributivité*).

1. $(a + b) \cdot (c + d)$
2. $(a + b) \cdot (x + y)$
3. $(2a + b) \cdot (c + d)$
4. $(2a + b) \cdot (3c + d)$
5. $(2a + b) \cdot (3c + 5d)$
6. $(2a + 3b)^2$
7. $(a + b) \cdot (c - d)$
8. $(a - b) \cdot (c + d)$
9. $(a + 2b) \cdot (ac - d)$
10. $(a + 2b) \cdot (ac - 2d)$
11. $(a + 2b) \cdot (ac - 2b^3)$
12. $(a + 2b^2) \cdot (a - 2b^2)$

17 Développez et réduisez les expressions suivantes :

- $(x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 3)$
- $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7) \cdot (3x + 2)$
- $(2x^3 - 3x^2 + 5)(4x^2 - 1)$
- $(3x^3 + 7x - 4 - 5x^2)(3 - x - 2x^2)$

18 Développez les expressions algébriques suivantes :

- $(a + b) \cdot (c + d)$
- $(2a + b)(2a + 3d)$
- $(a - b) \cdot (c - d)$
- $(a^2 - 2b)(2a^3 + c)$
- $(x - y) \cdot (z + w)$
- $(2x^2 - 3xy)(3z + w)$

19 Développez et réduisez les expressions suivantes :

- $a \cdot (a^2 - 1) + a^2 \cdot (a - 1)$
- $a^2 \cdot (x + 1) - b^2 \cdot (y - 2)$
- $a \cdot (a^2 + b) + (a + b^2) \cdot b$
- $(3a - 2) \cdot a - (3a + 2) \cdot a$

6 Développements à l'aide des identités remarquables

Certains développements sont si fréquents qu'il est plus utile de retenir la structure de l'expression finale que de refaire à chaque fois tous les calculs intermédiaires ; ces développements sont appelés des *identités remarquables*.

En voici les deux principales :

carré du binôme

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

différence de deux carrés

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

20 Développez les expressions suivantes :

- $(a + 2)^2$
- $(2 - b)^2$
- $(2a^2 - 3ab)^2$
- $(\frac{2}{3} - a)^2$
- $(a^2b + 2ab^2)^2$
- $(\frac{a}{2} + \frac{b}{3})^2$
- $(-3c - 0,5)^2$
- $(\frac{3}{4}x - \frac{y}{3})^2$

21 Effectuez et réduisez, en utilisant les *identités remarquables* dans la mesure du possible :

- $(\frac{1}{x} + 4)^2$
- $(a + b)^2 + (a - b)^2$
- $(\frac{2}{3}c + \frac{3}{4}d)^2$
- $(3a + 4)^2 + (3a - 4)^2$
- $(-\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y)^2$
- $(a + b)^2 + a^2 + b^2$
- $(x - 4)^2 - x^2$
- $(a - x)^2 + (a + x)^2$
- $(xy - \frac{x}{y})^2$
- $(1 + \frac{1}{x^2})^2$

22 Développez les expressions suivantes :

- $(a + 5)(a - 5)$
- $(x^2 + 0,1)(x^2 - 0,1)$
- $(x + 2y)(x - 2y)$
- $(2x + 3a)(2x - 3a)$
- $(3 + x)(3 - x)$
- $(xy^2 + x^2y)(xy^2 - x^2y)$
- $(-x + 5)(x + 5)$
- $(a^4x + \frac{1}{4})(a^4x - \frac{1}{4})$
- $(-x + 7)(-x - 7)$
- $(a^2b + ab^3)(a^2b - ab^3)$

23 Effectuez et réduisez, en utilisant les *identités remarquables* dans la mesure du possible :

- $(a + 1) \cdot (a - 1) \cdot (a^2 + 1)$
- $(a + 3) \cdot (a - 3) \cdot (a^2 + 9)$
- $(x^2 + y) \cdot (x^2 - y) \cdot (x^4 + y^2)$
- $(a^2 - 4) \cdot (a + 2) \cdot (a - 2)$
- $(x - \frac{1}{y}) \cdot (x + \frac{1}{y}) \cdot (x^2 + \frac{1}{y^2})$
- $(a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 1) \cdot (a^4 + 1)$
- $(a + 2b) \cdot (a^2 + 4b^2) \cdot (a - 2b) \cdot (a^4 + 16b^4)$

7 Exercices « mixtes »

24 Effectuez et réduisez, en utilisant les *identités remarquables* dans la mesure du possible :

- $(x^3 - 1) \cdot (1 + 2x^3)$
- $(a^2 - 1) \cdot (2a^2 + a)$
- $(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
- $(x^2 - 5x + 1) \cdot (x + 3)$
- $(x^2 - 3x - 2) \cdot (x + 1)$
- $(a^3 + a - 2) \cdot (a^2 - a - 2)$
- $(1 - b - c) \cdot a + b \cdot (a - c - 2)$
- $(a - b)^2 \cdot c^2 - (b - c)^2 \cdot a$

25 Développez et réduisez les expressions suivantes, en utilisant les *identités remarquables* dans la mesure du possible.

1. $3 \cdot (1 - 5x) - (1 - 15x)$
2. $4 \cdot (3x - 4)^2$
3. $[4 \cdot (3x - 4)]^2$
4. $(1 - 5x) \cdot (-1 + 5x)$
5. $3 \cdot (x - 5) + 4 \cdot (1 - x)^2$
6. $-2 \cdot (x - 5) - 2 \cdot (4 - x)^2$
7. $[-2 \cdot (x - 5) - 2 \cdot (4 - x)]^2$

26 Développez et réduisez les expressions suivantes, en utilisant les *identités remarquables* dans la mesure du possible.

1. $-(2x + 3)(x - 5) - (3 - x)(2x - 1)$
2. $(5x + 1)(2x + 3) + (2 - x)(1 - 5x) - (3x - 7)$
3. $(5x + 3)(2x + 1) + (2x - 1)(x + 2) - 3(1 - x)$
4. $(5 + x)^2 - (5 - x)^2$
5. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
6. $(2x - 3)(2x + 3)$
7. $\left(\frac{3x}{4} + \frac{1}{3}\right)^2$

27 Développez et réduisez les expressions suivantes, en utilisant les *identités remarquables* dans la mesure du possible.

1. $\left(7x + \frac{4}{3}\right)\left(7x - \frac{4}{3}\right)$
2. $(7x - 3)^2 - (3x - 7)^2$
3. $(3x + 1)^2 - (x - 5)^2$
4. $(4x - 3)(4x + 3) + (6x - 5)^2$
5. $\left(\frac{4}{7}x - \frac{1}{3}\right)^2 + (x - 2)\left(\frac{5}{7} + \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{2}{7}x + 1\right)^2$
6. $-3(2x + 5)^2 + 4(x - 2)^2$
7. $7x(x - 3)^2 - 5x(4 + x)^2$
8. $\frac{(x - 3)^2}{6} + \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(x + 1)^2}{18}$

8 Factorisations

Factoriser une expression algébrique, c'est transformer une *somme* de termes en un *produit* de plusieurs facteurs.

28 Factorisez les expressions algébriques suivantes, c'est-à-dire transformez les expressions algébriques suivantes en un *produit*.

1. $5a + 2a$
2. $5a + c \cdot a$
3. $b \cdot a + c \cdot a$
4. $2ab + 2ac$
5. $ab + 2a$
6. $ab + 3b$
7. $ab + a$
8. $ab + b$
9. $ab - 2a$
10. $ab - 3b$
11. $ab - a$
12. $ab - b$
13. $2ab - a$
14. $2ab - b$
15. $a^2b + a$
16. $a^2b + b$
17. $a^2b + 2a$
18. $a^2b - 3b$
19. $4a^2b + 2a$
20. $6a^2b - 3b$
21. $a^2b + a^2$
22. $a^2b + b^2$

29 Mettez en évidence le facteur commun :

1. $5a^2 - 2a^2$
2. $5a^2 - c \cdot a^2$
3. $b \cdot (a + 1) - c \cdot (a + 1)$
4. $ab - ac$
5. $a \cdot 8 + a$
6. $ab + a$
7. $a \cdot 8 - a$
8. $a \cdot b - a$
9. $(2a + x) \cdot 8 - (2a + x)$
10. $(2a + x) \cdot b - (2a + x)$
11. $a^2 - a$
12. $3(a + x)^2 - 2(a + x)$
13. $2(a + b) + 5(a + b)$
14. $2(a + b)^2 + a + b$

30 Mettez en évidence le facteur commun :

1. $ab + ac + ad$
2. $-2ab - 2bc$
3. $abc + abd - ab$
4. $-a^2b + a^2c - a^2d$
5. $ab^2c - ab^2d$
6. $-bc + cd - c$

31 Factorisez les expressions suivantes :

1. $y \cdot (b - a) - x \cdot (b - a)$
2. $2(a + b) - 3(a + b)^2$
3. $12x^2y^2 - 18xy^3 + 24x^3y$
4. $12a^2x^3 - 30a^3x^2 + 18ax^4$
5. $3a^2 - 9ab^2 + 6a$
6. $3abx^3 - 21a^2b^2x^2 - 6a^3b^3x$
7. $5x \cdot (x + 2)^2 - 3x^2 \cdot (x + 2)$
8. $5 \cdot (a + b - c) - 10a \cdot (a + b - c)$

9 Factorisations à l'aide des identités remarquables

32 Complétez les *identités remarquables* suivantes :

1. $4x^2 + \square + 25 = (\square + \square)^2$
2. $\square - \square + 100 = (3y - \square)^2$
3. $49z^2 - 42z + \square = (\square - \square)^2$
4. $4a^2 - \square = (\square + \square)(\square - 9)$
5. $(\square + 6m^3)^2 = 4a^2 + \square + \square$
6. $\square - 25 = (2x - \square)(\square + 5)$
7. $(\frac{3}{4}b^3 - \square)^2 = \square - 2b^3c^2 + \square$
8. $(\square + \frac{7}{5})(5x^4 - \square) = \square - \square$

33 Factorisez les différences de carrés suivantes :

1. $a^2 - 9$
2. $25x^2 - 16$
3. $16x^2 - 25y^2$
4. $81 - \frac{a^2}{25}$
5. $a^2 - 16b^2$
6. $a^2b^2c^2 - m^2$
7. $a^4 - b^4$
8. $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{25}$
9. $81a^4 - \frac{1}{16}$
10. $a^2b^4 - 1$
11. $x^4 - 81$
12. $16a^2x^2 - 9b^2c^2$

34 Vérifiez si les trinômes suivants sont des *carrés parfaits*.

1. $x^2 - 4x + 4$
2. $a^2 - 8a + 16$
3. $25a^2 + 30a + 9$
4. $49 - 14x + x^2$
5. $a^2 - \frac{2a}{3} + \frac{1}{9}$
6. $\frac{a^2}{9} + \frac{2ab}{15} + \frac{b^2}{25}$
7. $a^2 + 4ab + 4b^2$
8. $9x^2 - 12xy + 4y^2$

35 Factorisez en mettant si possible en évidence et en recherchant ensuite le ou les produits remarquables à utiliser :

1. $ax^2 - ay^2$
2. $a^4b^2 - a^2b^4$
3. $a^2x - 6ax + 9x$
4. $3a^3x - 3ax^3$
5. $0,04x^2 - 0,09y^2$
6. $b^2 - b + 4^{-1}$
7. $ab^4cd^4 - ab^2cd^2$
8. $2x^2 - 12x + 18$
9. $x^4 - 2x^2 + 1$
10. $5a^3 - 15ab^2$
11. $x^4 - 6x^2 + 9$
12. $a^6 - \frac{1}{16}$
13. $49a^3 - a$
14. $\frac{a^2}{4} + \frac{1}{49} - \frac{a}{7}$