

1 Techniques de calcul

Pour les exercices suivants, vous effectuerez tous les calculs « à la main », ensuite seulement vous vérifierez vos résultats à l'aide de la calculatrice.

Exercice 1

Calculez le nombre dérivé $f'(a)$ comme limite d'un taux d'accroissement dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x - 7$ $a = -1$
2. $f(x) = x^2 - 4x$ $a = 0$
3. $f(x) = x^2 - 4x$ $a = 4$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ $a = -\frac{1}{2}$
5. $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$ $a = 1$
6. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $a = 1$

Exercice 2

Calculez la dérivée de la fonction f , lorsque $f(x)$ égale

1. $x^7 + 2x^5 - \frac{1}{2}x^3$
2. $x^3 - 7x^2 - \frac{3}{2}x + 1$
3. $\frac{x^4}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
4. $\sqrt{2} + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$
5. $\frac{(x+1)^4}{2}$
6. $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}$

Exercice 3

Calculez, en utilisant les règles algébriques de dérivation, la fonction dérivée de la fonction f définie par les expressions suivantes :

1. $\frac{1}{-3x + 2}$
2. $\left(\frac{1}{-3x + 2}\right)^4$
3. $\left(\frac{2}{3}x - 4\right)^2$
4. $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}x - 4\right)^2}$
5. $\frac{-3x + 2}{5x - 4}$
6. $\left(\frac{-3x + 2}{5x - 4}\right)^2$
7. $\left(\frac{-3x + 2}{5x - 4}\right)^{-2}$
8. $\left(\frac{5x - 4}{-3x + 2}\right)^2$

Exercice 4

Calculez la dérivée de la fonction f , lorsque $f(x)$ est défini par les expressions suivantes :

1. $2x + 3$
2. $x + \sqrt{2x + 3}$
3. $(2x + 3)^5$
4. $2x + 1$
5. $3x - (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$
7. $-3x + 5$
8. $1 + \sqrt{-3x + 5}$
9. $\sqrt[3]{-3x + 5}$

Exercice 5

Calculez $f'(x)$ si $f(x)$ est défini par les expressions suivantes :

1. $(2x^2 - 3x + 1) \cdot (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$
2. $x \cdot \sqrt[3]{2x + 1}$
3. $(x^2 + x + 1) \cdot \sqrt{3x - 2}$
4. $x^2 \cdot (2x + 1)^{\frac{1}{3}}$
5. $(-2x + 1)^3 \cdot \sqrt{5x - 2}$
6. $x^3 \cdot (2x + 1)^{\frac{-1}{3}}$
7. $\frac{2x - 1}{\sqrt{3x - 1}}$
8. $\frac{x}{\sqrt[3]{2x + 1}}$

Exercice 6

Calculez sans garder d'exposants fractionnaires ou négatifs dans la réponse

1. $(5x - \sqrt{9 - x^2})'$
2. $(\sqrt[3]{3x^2 + x + 1})'$
3. $[(2x - 1)\sqrt{1 - 4x}]'$
4. $\left(\frac{\sqrt{2x - 1}}{1 - x}\right)'$

Exercice 7

Calculez la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $\sin^2(x)$
2. $\frac{\cos(x) - 1}{2 + \cos(x)}$
3. $\sin(x) + \cos(x)$
4. $\sin(x) \cdot \cos(x)$
5. $\sin^2(x) + 2 \sin(x) - 2$
6. $\sin(x) + 2 \sin \frac{x}{2}$
7. $\frac{1}{3} \sin(3x) - \sin(x)$
8. $\cos(x) + \frac{1}{2} \cos(2x)$
9. $\cos(2x) - 2 \sin(x)$
10. $\cos(\sqrt{x}) - 2 \sin^2(\sqrt{x})$

Exercice 8

La fonction *logarithme népérien* \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* par les relations

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

Calculez alors les dérivées des fonctions définies par les expressions analytiques suivantes :

1. $\ln^2(x)$
2. $\ln(x + 1)$
3. $\ln(-x^2 + x + 1)$
4. $\ln(\sqrt{x})$

Exercice 9

La fonction *exponentielle* \exp est définie sur \mathbb{R} par les relations

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

Calculez alors les dérivées des fonctions définies par les expressions analytiques suivantes :

1. $\exp^2(x)$
2. $\exp(x + 1)$
3. $\exp(-x^2 + x + 1)$
4. $\exp(\sqrt{x})$

2 Intersections

Exercice 10

Calculez les *points et angles d'intersection* des paraboles définies par les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 4$, $g(x) = x^2 - x - 2$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8$
3. $f(x) = x^2 + x - 3$, $g(x) = 4x - x^2$
4. $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 1 - 2x^2$

Vérifiez vos résultats en construisant le graphique des fonctions f et g .

Exercice 11

Calculez les *points et angles d'intersection* des courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$
2. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$
3. $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = \sqrt{4 - x}$
4. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3 - 2\sqrt{4 - 2x}$

Vérifiez vos résultats en construisant le graphique des fonctions f et g .

Exercice 12

Calculez les *points et angles d'intersection* des courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \frac{x}{x - 1}$
3. $f(x) = -x + 2$, $g(x) = -1 + \frac{1}{2x - 1}$
4. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $g(x) = \frac{1 - 2x}{3 + 2x}$

3 Tangentes

Exercice 13

Déterminez l'*inclinaison* de la *tangente* à la courbe d'équation donnée au point d'abscisse a :

1. $y = 4x^3 - \frac{x}{2} + 1$ $a = -1$
2. $y = \frac{1}{3x - 1}$ $a = \frac{1}{3}$
3. $y = \left(\frac{1}{x} - 3\right) \cdot (x^2 - 1)$ $a = 1$
4. $y = \sqrt{2x - 4}$ $a = 3$
5. $y = \frac{1}{\sin 2x}$ $a = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 14

Déterminez une *équation cartésienne de la tangente* à la courbe d'équation donnée au point d'abscisse a .

1. $y = x^2 - x - 1$ $a = 2$
2. $y = \frac{3 \cdot (1 - x)}{2 - x}$ $a = -1$
3. $y = \frac{1}{(2x - 1)^2}$ $a = 1$
4. $y = 2 \cdot \tan^2(2x)$ $a = \frac{\pi}{2}$

Exercice 15

Construisez la *tangente* à la courbe donnée au point d'abscisse a .

1. $y = 1 - x^2$ $a = 1$
2. $y = \frac{1}{x}$ $a = 1$
3. $y = 2 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$ $a = 4$
4. $y = \sqrt{|x|}$ $a = -1$
5. $y = \sqrt[3]{2x^2}$ $a = -2$

4 Conditions de tangence

Exercice 16

Déterminez les points de la courbe d'équation

$$y = x^3 - x^2 - x + 1$$

en lesquels la tangente est horizontale.

Exercice 17

¿Para cuáles valores de x la gráfica de

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$$

tiene una tangente horizontal?

Exercice 18

Demuestre que la curva

$$y = 6x^3 + 5x - 3$$

no tiene recta tangente con pendiente 4.

Exercice 19

Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $A(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

Exercice 20

La *recta normal* a una curva Γ , en un punto P , es, por definición, la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente a Γ en P .

Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto $P(2, -3)$. Grafique la parábola y su recta normal.

Exercice 21

Encuentre una parábola que tenga la ecuación

$$y = ax^2 + bx$$

y cuya tangente en $A(1, 1)$ tenga la ecuación

$$y = 3x - 2$$

Exercice 22

Determinar los coeficientes a y b de la parábola

$$y = ax^2 + bx + 2$$

sabiendo que la recta tangente en el punto en que $x = 1$ es la recta $y = -2x$.

Exercice 23

Determinar los valores del parámetro m , para que las tangentes a la curva de la función

$$f(x) = m^2x^3 + mx^2 + 3x + 9$$

en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 2$ sean paralelas.

Exercice 24

Determina de manera razonada todas la funciones f que son polinómicas de tercer grado y verifican

$$f'(-1) = 0 = f'(1).$$

¿Puede existir alguna de la funciones determinadas anteriormente que verifique $f(0) = 0 = f(1)$?

Exercice 25

Considérese la curva de ecuación

$$y = kx^3 + 6x^2 - kx - 18$$

1. ¿Qué debe valer k si las tangentes en los puntos $A(1; y(1))$ y $B(-2; y(-2))$ son paralelas?
2. Determinar las ecuaciones de ambas tangentes.

Exercice 26

Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$ y la recta secante a ella por los puntos de abscisas $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$, hallar la ecuación de la tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.

Exercice 27

Déterminez le paramètre a de telle manière que la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - ax + 1$ admette en $x = \frac{1}{2}$ un extrémum.

Exercice 28

Hallar los valores de a y b par que la función

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$$

tenga un máximo en el punto $x = 1$ y un mínimo en el punto $x = 2$.