1 Techniques de calcul

Pour les exercices suivants, vous effectuerez tous les calculs « à la main », ensuite seulement vous vérifierez vos résultats à l'aide de la calculatrice.

Exercice 1

Calculez le *nombre dérivé* $f'(a)$ comme *limite d'un taux d'accroissement* dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x - 7$ $\quad a = -1$
2. $f(x) = x^2 - 4x$ $\quad a = 0$
3. $f(x) = x^2 - 4x$ $\quad a = 4$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ $\quad a = -\frac{1}{2}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ $\quad a = 1$
6. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $\quad a = 1$

Exercice 2

Calculez la *fonction dérivée* de la fonction f, lorsque $f(x)$ égale

1. $x^7 + 2x^5 - \frac{1}{2}x^3$
2. $x^3 - 7x^2 - \frac{3}{2}x + 1$
3. $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$
4. $\sqrt{2} + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$
5. $\dfrac{(x+1)^4}{2}$
6. $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}$

Exercice 3

Calculez, en utilisant les règles algébriques de dérivation, la *fonction dérivée* de la fonction f définie par les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{-3x+2}$
2. $\left(\dfrac{1}{-3x+2}\right)^4$
3. $\left(\frac{2}{3}x - 4\right)^2$
4. $\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}x - 4\right)^2}$
5. $\dfrac{-3x+2}{5x-4}$
6. $\left(\dfrac{-3x+2}{5x-4}\right)^2$
7. $\left(\dfrac{-3x+2}{5x-4}\right)^{-2}$
8. $\left(\dfrac{5x-4}{-3x+2}\right)^2$

Exercice 4

Calculez le *nombre dérivé* de la fonction f en 1, lorsque $f(x)$ est défini par les expressions suivantes :

1. $2x + 3$
2. $x + \sqrt{2x+3}$
3. $(2x+3)^5$
4. $2x + 1$
5. $3x - (2x+1)^{\frac{1}{2}}$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$
7. $-3x + 5$
8. $1 + \sqrt{-3x+5}$
9. $\sqrt[3]{-3x+5}$

Exercice 5

Calculez $f'(x)$ si $f(x)$ est défini par les expressions suivantes :

1. $(2x^2 - 3x + 1) \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}}$
2. $x \cdot \sqrt[3]{2x+1}$
3. $(x^2 + x + 1) \cdot \sqrt{3x-2}$
4. $x^2 \cdot (2x+1)^{\frac{1}{3}}$
5. $(-2x+1)^3 \cdot \sqrt{5x-2}$
6. $x^3 \cdot (2x+1)^{\frac{-1}{3}}$
7. $\dfrac{2x-1}{\sqrt{3x-1}}$
8. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{2x+1}}$

Exercice 6

Calculez sans garder d'exposants fractionnaires ou négatifs dans la réponse

1. $\left(5x - \sqrt{9 - x^2}\right)'$
2. $\left(\sqrt[3]{3x^2 + x + 1}\right)'$
3. $\left[(2x-1)\sqrt{1-4x}\right]'$
4. $\left(\dfrac{\sqrt{2x-1}}{1-x}\right)'$

Exercice 7

Calculez la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $\sin^2(x)$
2. $\dfrac{\cos(x) - 1}{2 + \cos(x)}$
3. $\sin(x) + \cos(x)$
4. $\sin(x) \cdot \cos(x)$
5. $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 2$
6. $\sin(x) + 2\sin\dfrac{x}{2}$
7. $\frac{1}{3}\sin(3x) - \sin(x)$
8. $\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$
9. $\cos(2x) - 2\sin(x)$
10. $\cos(\sqrt{x}) - 2\sin^2(\sqrt{x})$

Exercice 8

La fonction *logarithme népérien* ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

Calculez alors les dérivées des fonctions définies par les expressions analytiques suivantes :

1. $\ln^2(x)$
2. $\ln(x+1)$
3. $\ln(-x^2 + x + 1)$
4. $\ln(\sqrt{x})$

Exercice 9

La fonction *exponentielle* exp est définie sur $\mathbb{R}$ par les relations

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

Calculez alors les dérivées des fonctions définies par les expressions analytiques suivantes :

1. $\exp^2(x)$
2. $\exp(x+1)$
3. $\exp(-x^2 + x + 1)$
4. $\exp(\sqrt{x})$

2 Intersections

Exercice 10

Calculez les *points et angles d'intersection* des *paraboles* définies par les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 4,\quad g(x) = x^2 - x - 2$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x,\quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 8$
3. $f(x) = x^2 + x - 3,\quad g(x) = 4x - x^2$
4. $f(x) = x^2 - 2x - 1,\quad g(x) = 1 - 2x^2$

Vérifiez vos résultats en construisant le graphique des fonctions f et g.

Exercice 11

Calculez les *points et angles d'intersection* des *courbes représentatives* des *fonctions* suivantes :

1. $f(x) = -2x + 3,\quad g(x) = \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = 2x + 3,\quad g(x) = \sqrt{x-1}$
3. $f(x) = \sqrt{x+1},\quad g(x) = \sqrt{4-x}$
4. $f(x) = 2x + 1,\quad g(x) = 3 - 2\sqrt{4-2x}$

Vérifiez vos résultats en construisant le graphique des fonctions f et g.

Exercice 12

Calculez les *points et angles d'intersection* des *courbes représentatives* des *fonctions* suivantes :

1. $f(x) = 2x + 1,\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 2x + 1,\quad g(x) = \dfrac{x}{x-1}$
3. $f(x) = -x + 2,\quad g(x) = -1 + \dfrac{1}{2x-1}$
4. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1,\quad g(x) = \dfrac{1-2x}{3+2x}$

3 Tangentes

Exercice 13

Déterminez l'*inclinaison* de la *tangente* à la courbe d'équation donnée au point d'abscisse a :

1. $y = 4x^3 - \dfrac{x}{2} + 1 \qquad a = -1$
2. $y = \dfrac{1}{3x-1} \qquad a = \frac{2}{3}$
3. $y = \left(\dfrac{1}{x} - 3\right) \cdot \left(x^2 - 1\right) \qquad a = 1$
4. $y = \sqrt{2x-4} \qquad a = 3$
5. $y = \dfrac{1}{\sin 2x} \qquad a = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 14

Déterminez une *équation cartésienne de la tangente* à la courbe d'équation donnée au point d'abscisse a.

1. $y = x^2 - x - 1 \qquad a = 2$
2. $y = \dfrac{3 \cdot (1-x)}{2-x} \qquad a = -1$
3. $y = \dfrac{1}{(2x-1)^2} \qquad a = 1$
4. $y = 2 \cdot \tan^2(2x) \qquad a = \frac{\pi}{2}$

Exercice 15

Construisez la *tangente* à la courbe donnée au point d'abscisse a.

1. $y = 1 - x^2 \qquad a = 1$
2. $y = \dfrac{1}{x} \qquad a = 1$
3. $y = 2 \cdot \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 \qquad a = 4$
4. $y = \sqrt{|x|} \qquad a = -1$
5. $y = \sqrt[3]{2x^2} \qquad a = -2$

4 Conditions de tangence

Exercice 16

Déterminez les points de la courbe d'équation

$$y = x^3 - x^2 - x + 1$$

en lesquels la tangente est *horizontale*.

Exercice 17

¿Para cuáles valores de x la gráfica de

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$$

tiene una tangente horizontal ?

Exercice 18

Demuestre que la curva

$$y = 6x^3 + 5x - 3$$

no tiene recta tangente con pendiente 4.

Exercice 19

Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $A(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

Exercice 20

La *recta normal* a una curva Γ, en un punto P, es, por definición, la recta que pasa por P y es *perpendicular* a la recta tangente a Γ en P.

Encuentre una ecuación de la recta *normal* a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto $P(2, -3)$.
Grafique la parábola y su recta normal.

Exercice 21

Déterminez une parabole ayant comme équation

$$y = ax^2 + bx$$

et dont la tangente au point $A(1, 1)$ admet comme équation $y = 3x - 2$.

Exercice 22

Déterminez les coefficients a et b de la parabole d'équation

$$y = ax^2 + bx + 2$$

sachant que la tangente au point d'abscisse $x = 1$ admet comme équation $y = -2x$.

Exercice 23

Considérons la fonction f définie par

$$f_m(x) = m^2x^3 + mx^2 + 3x + 9$$

où m est un paramètre réel.

1. Déterminez les valeurs du paramètre m pour que les tangentes au graphe de f_m aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = 2$ soient *parallèles*.
2. Quel est le sens de variation de f_m ? Est-ce que la fonction f_m admet des *extremums* ?
3. Déterminez l'équation de la tangente au graphe de f_m à l'origine. Qu'est-ce que vous observez ?

Exercice 24

Considérons les polynômes de degré 3.

1. Déterminez les polynômes f qui vérifient

$$f'(-1) = 0 = f'(1).$$

2. Montrez que $\Omega(0; f(0))$ est *centre de symétrie* de Γ_f.
3. Est-ce qu'il y a, parmi ces polynômes, des fonctions f qui vérifient de plus $f(0) = 0 = f(1)$?

Exercice 25

Considérons les polynômes de degré 3.

1. Déterminez f sachant que

$$\begin{aligned} f(-3) &= 4 \qquad & f(1) &= 0 \\ f'(-3) &= 0 \qquad & f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

2. Est-ce que cette fonction admet un centre de symétrie ?

Exercice 26

Considérons les polynômes de degré 3.

1. Déterminez f sachant que

$$\begin{aligned} f(3) &= 4 \qquad & f(-1) &= 0 \\ f'(3) &= 0 \qquad & f'(-1) &= 0 \end{aligned}$$

2. Est-ce que cette fonction admet un centre de symétrie ?
3. Quelle est la relation entre la fonction que nous venons de calculer et la fonction de l'exercice précédent ?

Exercice 27

Vers la notion de point d'inflexion.

1. Pour certains des exemples précédents, nous venons d'observer que, si la cubique admettait des points extrémaux, alors le milieu de ces deux points était un (et même : le) *centre de symétrie* du graphe.
   Est-ce que toute cubique admet un *extremum* ?
2. Est-ce que toute cubique admet un *centre de symétrie* ?

Exercice 28

Notons k un paramètre réel ; considérons la fonction f définie par

$$f : x \longmapsto kx^3 + 6x^2 - kx - 18\,.$$

1. Déterminez k sachant que les parallèles à Γ_f en $A(1; f(1))$ et $B(-2; f(-2))$ sont parallèles.
2. Déterminez les tangentes en A et B.
3. Quelle est la position du centre de symétrie de Γ_f par rapport à A et B ?
4. Représentez la fonction f dans la fenêtre de tracé (window) $[-3; 2] \times [-30; 5]$.

Exercice 29

Considérons la parabole Γ d'équation

$$y = x^2 - 2x + 5\,.$$

1. Déterminez l'équation de la *tangente* à Γ *parallèle* à la *sécante* qui passe par les points A et B d'abscisses respectives $x = 1$ et $x = 3$.
2. Quelle est la position du point de tangence par rapport à A et B ?
3. Est-ce toujours le cas ?

Exercice 30

Considérons la *famille de fonctions* dépendant du *paramètre* réel a définies par

$$f : x \longmapsto 2x^2 - ax + 1$$

- Déterminez le paramètre a de telle manière que la fonction admette en $x = \frac{1}{2}$ un extrémum.
- Quel lest le *lieu géométrique* des extrema de f_a ?

Exercice 31

Déterminez la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 4$ au point d'intersection de $\mathcal{E}$ avec la première bissectrice, situé dans le premier quadrant.

Exercice 32

Déterminez les valeurs des paramètres a et b pour que la fonction

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$$

admette un *maximum* en $x = 1$ et un *minimum* pour $x = 2$.

5 Problèmes V_{200}

Exercice 33

Déterminez un polynôme f du quatrième degré sachant que
- 3 est une racine de f
- f possède un extrémum en $x = 2$
- $\Omega(-1, -3)$ est un point d'inflexion de f
- Γ_f passe par $A(-4, 6)$.

Représentez graphiquement la fonction f.

Exercice 34

Examinez s'il existe un polynôme de degré 4 possédant les propriétés suivantes :
- -3 est une racine de f
- f possède un extrémum en $x = 1$
- f possède un point d'inflexion en $x = 3{,}5$
- la droite $\mathfrak{D}$ d'équation

$$y = \frac{125}{96} \cdot x - \frac{221}{16}$$

est tangente à Γ_f au point $A(6; -6)$.

Exercice 35

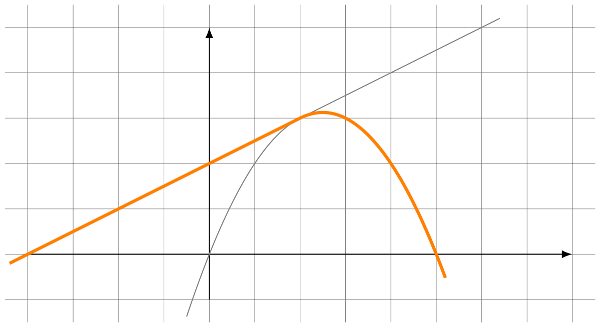
Déterminez les polynômes f du second degré sachant que
- f possède une maximum en $x = \frac{\sqrt{13}}{8}$
- Γ_f coupe l'axe des y en $I\left(0; \frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$
- Γ_f est tangent à la droite $\mathfrak{D}$ d'équation

$$y = \frac{9\sqrt{13}}{7} \cdot x + \frac{52+3\sqrt{7}}{7}$$

Représentez graphiquement Γ_f et $\mathfrak{D}$.

Exercice 36

Une route représentée par une *demi-droite* $\mathfrak{D}$ passant par le point $B(0; 2)$ doit être prolongée au point $A(2; 3)$ par une autre route représentée par une *parabole*.
Pour que le passage de l'une des routes vers l'autre soit le plus lisse possible, on demande que la tangente à la parabole au point de contact A coïncide avec la droite $\mathfrak{D}$.



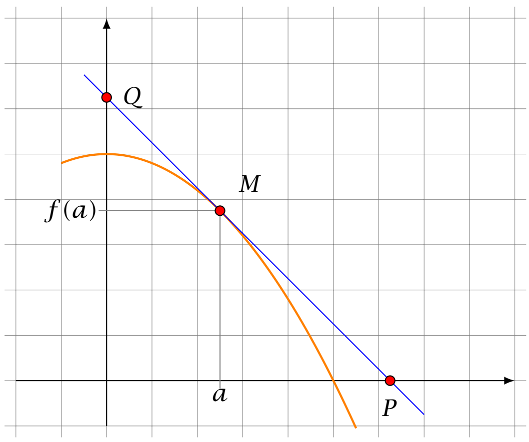
1. Isabelle propose une *parabole passant par l'origine*. Quelle est l'équation de cette parabole ?
2. Monia prétend qu'il existe encore d'autres *paraboles* qui réalisent les mêmes conditions de contact qui ne passent pas nécessairement par l'origine.
   Déterminez les équations de ces paraboles.
3. Déterminez l'équation de la parabole passant par le point $C(6; 6)$ qui réalise les conditions précédentes.

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - x^2$$

et $M(a; b)$ un point de Γ_f tel que $a > 0$.
La tangente en M à Γ_f, notée T_a, coupe l'axe des abscisses en P et l'axe des ordonnées en Q.



1. Dessinez une figure exacte lorsque $a = \frac{1}{2}$. (Unité graphique : 4 cm)

2. Pour quelle valeur de a l'aire du triangle OPQ est-elle minimale ? Calculez la valeur « exacte » (formelle) et une valeur approchée à 0,01 près de ce minimum.
3. Pour quelles valeurs de a, l'aire du triangle OPQ est-elle supérieure ou égale à 1 ? On demande des valeurs approchées à 0,01 près.

Exercice 38

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - \tfrac{4}{9} \cdot x + \tfrac{4}{3}$$

1. Déterminez l'équation de la tangente $\mathfrak{D}_1$ à Γ_f au point $P(1; f(1)) \in \Gamma_f$.
2. Déterminez le point d'intersection I de $\mathfrak{D}_1$ avec l'axe des ordonnées.
3. Examinez *graphiquement* s'il existe d'autres tangentes à Γ_f qui passent par ce point I.
4. De manière *analytique* :
   - Déterminez l'équation de la tangente $\mathfrak{D}_2$ à Γ_f au point $A(a; f(a))$;
   - Déterminez le point d'intersection de $\mathfrak{D}_2$ avec l'axe des ordonnées Oy ;
   - Déterminez les équations des tangentes qui passent par I.
5. Quel est le nombre de tangentes à Γ_f qui passent par $B(0; 3)$?
6. Quel est le nombre de tangentes à Γ_f qui passent par $C(0; 2)$?
7. Quel est le nombre de tangentes à Γ_f qui passent par $D\left(0; \frac{4}{3}\right)$?
8. Plus généralement : déterminez le nombre de tangentes par le point $M(0; m)$ où $m \in \mathbb{R}$.

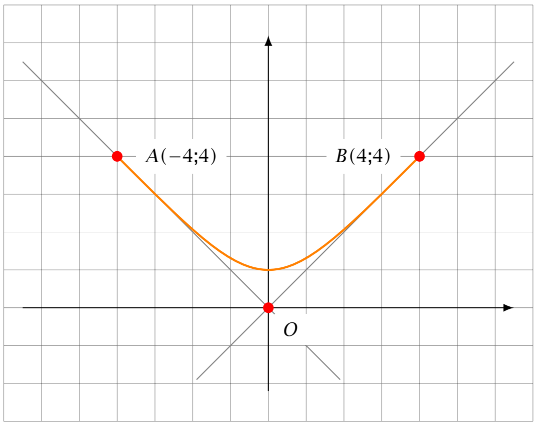
Exercice 39

Une localité L est traversée par une route rectiligne AB avec $A(0; 4)$ et $B(4; 0)$. Suite à des plaintes répétées de la part des habitants face aux nuisances occasionnées par le trafic de plus en plus intense, la commune propose de construire une route qui devra contourner la localité. Elle doit déboucher tangentiellement en A et en B dans l'ancienne route et doit passer en outre par $C(2; 1)$.

1. Faites une esquisse.
2. Établissez l'expression d'un polynôme p de degré 4 vérifiant ces contraintes.
   Esquissez le graphe de p.
3. Examinez le comportement de p aux points de raccord (est-ce que les raccords se font « sans heurts » ?)
4. Établissez l'équation d'un polynôme q de degré *minimal* qui réalise le contournement en veillant en particulier à ce que les passages en A et en B se fassent « sans heurts ».
   Esquissez le graphe de la fonction q.

Exercice 40

Deux lignes de chemin de fer qui se croisent en O, doivent être reliées entre elles par un arc de courbe allant de A vers B.



1. Déterminez une fonction polynômiale de degré minimal réalisant cette connexion de telle sorte que les passages en A et en B se fassent « sans heurts ».
2. Une entreprise spécialisée dans la construction des chemins de fer soumet cinq propositions. Elles sont décrites par les fonctions suivantes :
   - $f_1(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + 2$
   - $f_2(x) = 8 - \sqrt{32 - x^2}$
   - $f_3(x) = -\frac{1}{512} \cdot x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{2}$
   - $f_4(x) = -\frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 4$
   - $f_5(x) = -\dfrac{512}{x^2 + 48} + 12$

   Examinez les différentes solutions, surtout quant à leur « comportement » en A et en B.
   Lesquelles proposeriez-vous à la direction des chemins de fer ? Justifiez votre choix.
3. En dehors du « bon comportement » en A et en B, la solution finalement retenue devra encore satisfaire les deux conditions supplémentaires que voici :
   - la *longueur de l'arc de courbe* $\overset{\frown}{AB}$ allant de A vers B doit être aussi petite que possible ;
   - la *courbure maximale* de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ doit être aussi faible que possible afin que les trains

circulant entre A et B ne soient pas obligés de trop réduire leur vitesse.
Quelle solution sera retenue ?