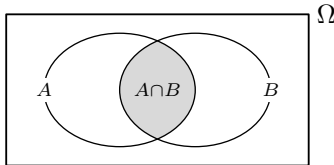


### 1 Probabilité d'une réunion

Considérons une *expérience aléatoire* décrite par l'espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ . Il est clair que :  $P(\Omega) = 1$  et  $P(\emptyset) = 0$ . Soient  $A$  et  $B$  des événements :  $A \subset \Omega, B \subset \Omega$ .



Si les événements  $A$  et  $B$  sont *incompatibles*, c'est-à-dire si  $A \cap B = \emptyset$ , alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si les événements  $A$  et  $B$  sont *compatibles* :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Le calcul de  $P(A \cap B)$  va nous occuper dans le paragraphe 3.

#### Exercice 1

*Expérience aléatoire* : tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir *au moins une* carte de couleur noire sachant que les cartes noires sont les trèfles (8 cartes) et les piques (8 cartes aussi) ?

#### Exercice 2

*Expérience aléatoire* : tirer au hasard un nombre dans  $\Omega = \{00; 01; 02; \dots; 99\}$ . Quelle est la probabilité que le nombre obtenu contienne *au moins un* chiffre 9 ?

#### Exercice 3

*Expérience aléatoire* : tirer au hasard un nombre dans l'ensemble  $\Omega = \{0; 1; 2; \dots; 9999\}$ . Quelle est la probabilité que le nombre obtenu contienne *au moins un* chiffre 9 ?

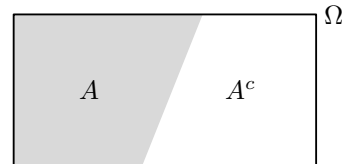
#### Exercice 4

*Expérience aléatoire* : jeter deux fois de suite le même dé. Quelle est la probabilité d'obtenir *au moins une* fois un résultat pair ?

### 2 Probabilité du complémentaire

Considérons une expérience aléatoire décrite par l'espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ . Soit  $A$  un événement

de  $\Omega : A \subset \Omega$ . Toutes les éventualités de  $\Omega$  qui ne réalisent *pas* l'événement  $A$  constituent un nouvel événement, l'événement *contraire* de  $A$ . Du point de vue ensembliste, l'événement contraire de l'événement  $A$  est donc le *complémentaire* de  $A$ . Notons par exemple :  $A^c$ .



Les événements  $A$  et  $A^c$  sont évidemment incompatibles ; de plus  $A \cup A^c = \Omega$ . D'après le paragraphe précédent :  $P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ , de sorte que :  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

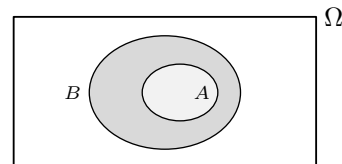
Retenons :

Si  $A$  est un événement quelconque de  $\Omega$  :

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Cette formule tire son utilité du fait que l'événement  $A^c$  est souvent plus simple que  $A$ .

Soient maintenant  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ . On suppose que la réalisation de  $A$  entraîne la réalisation de  $B : A \subset B$ ,  $A$  est un *sous-événement* de  $B$ . Alors  $B - A$  représente l'événement «  $B$  est réalisé, mais non  $A$  ».



Les événements  $A$  et  $B - A$  sont incompatibles et  $A \cup (B - A) = B$ . On a donc :  $P(B) = P(A) + P(B - A)$ . D'où :

Si l'événement  $A$  est contenu dans l'événement  $B$  :

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

#### Exercice 5

Reprenons l'exercice 2 du paragraphe 1. Expérience aléatoire : tirer au hasard un nombre dans  $\Omega = \{00; 01; \dots; 99\}$ . Quelle est la probabilité que le nombre obtenu contienne *au moins un* chiffre 9 ?

#### Exercice 6

On dispose de 10 urnes et l'on distribue au hasard des boules dans ces urnes. Quel est le nombre

minimal de boules qu'il faut distribuer pour que l'on puisse être sûr à 99% qu'une urne donnée contienne *au moins une* boule?

**Exercice 7**

Une classe contient  $n$  élèves. Quelle est la probabilité que deux au moins des élèves soient nés le même jour?

**Exercice 8**

Vers 1650, le chevalier de Méré jouait souvent aux dés et avait découvert qu'il était avantageux de parier sur un 6 lors de quatre jets d'un dé. Il en concluait qu'il était également avantageux de parier sur un double six si on lançait 24 fois deux dés.

Voici son raisonnement :

Si je lance le dé une fois, il y a 6 possibilités ; si je lance deux dés, il y a 36 possibilités ; donc 6 fois plus. Comme il est avantageux de parier sur un six si on lance le dé 4 fois, il est donc clair qu'il faut lancer le dé  $4 \cdot 6 = 24$  fois pour qu'il soit avantageux de parier sur un double six.

Malheureusement, il perdit son argent. Pourquoi?

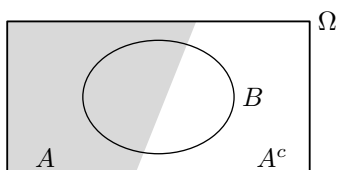
1. Quelle est la probabilité d'obtenir *au moins un* 6 si on lance 4 fois le dé?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir *au moins un* double six si on lance 24 fois deux dés?
3. Combien de fois faut-il lancer deux dés pour qu'il soit avantageux de parier sur un double six?

**3 Probabilités conditionnelles**

Considérons une expérience aléatoire décrite par l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$ . Soient  $A$  et  $B$  deux événements :  $A \subset \Omega, B \subset \Omega$ .

Le calcul de  $P(A \cap B)$  est un problème relativement subtil : on doit tenir compte des relations de *dépendance* entre les deux événements  $A$  et  $B$ .

Sachant que  $A$  est réalisé, comment cette *information* modifie-t-elle la probabilité de l'événement  $B$ ? Supposons que l'événement  $A$  est réalisé :



Cette information modifie notre espace probabilisé  $(\Omega, P)$ . Notons  $P_A$  la nouvelle mesure de probabilité sur  $\Omega$ . Que peut-on dire de  $P_A$ ?

1. Si  $B$  est un événement *incompatible* avec  $A$ ,  $B$  devient, après la réalisation de  $A$ , un événement *impossible* : si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $P_A(B) = 0$ .
2. Si  $B$  est un événement quelconque,  $P_A(B)$  ne peut dépendre que de la trace  $B \cap A$  de  $B$  sur  $A$  :  $P_A(B) = P_A(A \cap B)$ .
3. Si  $B$  et  $C$  sont deux événements contenus dans  $A$ , l'information sur  $A$  (qui est réalisé) ne peut modifier le *rapport* de leurs probabilités : si  $B$  est  $k$  fois plus probable que  $C$ , il en reste ainsi, même après la réalisation de  $A$ .

Ces trois conditions permettent d'écrire, pour un événement  $B \subset \Omega$  quelconque :

$$P_A(B) = P_A(A \cap B) = \frac{P_A(A \cap B)}{P_A(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Retenons la définition suivante :

On appelle *probabilité de B conditionnée par A* le nombre

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

L'événement  $B$  est *indépendant* de l'événement  $A$  si l'information que  $A$  est réalisé ne modifie pas la probabilité de  $B$ . Formellement :  $P(B/A) = P(B)$ . Or,  $P(B \cap A) = P(B/A) \cdot P(A)$ ; on obtient donc la formule suivante qui sert souvent à définir l'indépendance :

On dit que les événements  $A$  et  $B$  sont *indépendants* si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Alors :  $P(B/A) = P(B)$  et  $P(A/B) = P(A)$

**Exercice 9**

Le tableau suivant représente un dé pipé :

éventualité	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1

Quelle est la probabilité d'avoir un 6 sachant qu'on a un résultat pair?

**Exercice 10**

On lance deux fois de suite le même dé. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois un résultat pair?

**Exercice 11**

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire successivement, sans remise, deux boules. Étudiez la dépendance des événements  $A$  et  $B$  suivants :

- A la première boule est noire
- B la deuxième boule est blanche

**Exercice 12**

Modifions l'expérience précédente : on remet la boule après le premier tirage de sorte que le contenu de l'urne ne change pas. Étudiez alors la dépendance des événements  $A$  et  $B$ .

**Exercice 13**

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Laquelle des deux probabilités suivantes est plus grande ?

- A La probabilité d'avoir deux as sachant qu'on a l'as de pique
- B La probabilité d'avoir deux as sachant qu'on a un as quelconque.

**Exercice 14**

Un paquet de 8 cartes est composé des quatre as et des quatre rois. On tire deux cartes au hasard. Calculez, dans chacun des cas suivants, la probabilité pour que ces deux cartes soient des as.

1. On ne sait rien sur les deux cartes tirées.
2. On sait que l'une d'elles est un as.
3. On sait que l'une d'elles est un as noir.
4. On sait que l'une d'elles est l'as de pique.

**Exercice 15**

Vingt jetons, identiques quant à la forme, sont coloriés sur leurs deux faces. 10 sont blancs sur les deux faces; 6 sont blancs sur une face et noirs sur l'autre; 4 sont noirs sur les deux faces. On tire un jeton au hasard et l'on ne regarde qu'une des deux faces. Si elle est noire, quelle est la probabilité

1. pour que l'autre face soit noire aussi;
2. pour qu'elle soit blanche ?

**Exercice 16**

On dispose de trois tiroirs, chaque tiroir contenant deux compartiments. Le premier tiroir contient dans chaque compartiment une pièce d'or, le deuxième dans chaque compartiment une pièce d'argent et le troisième dans l'un des compartiments une pièce d'or, dans l'autre une pièce d'argent. On ouvre au hasard un des tiroirs, puis on

ouvre au hasard un des deux compartiments et l'on trouve une pièce d'argent. Quelle est la probabilité que l'autre compartiment contienne une pièce d'or ?

**Exercice 17**

Vingt personnes participent à une loterie; il y a exactement deux gagnants qui sont connus de l'organisateur seulement. La probabilité que Monsieur A gagne est donc  $\frac{1}{10}$ . L'organisateur annonce alors que Madame B a gagné. Est-ce que la probabilité que Monsieur A a gagné n'est plus que  $\frac{1}{19}$  ?

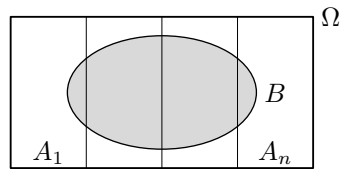
**Exercice 18**

Considérons une famille de 2 enfants. Comparez les deux probabilités que les deux enfants soient des filles sachant que

- l'enfant aîné est une fille
- la famille a déjà une fille.

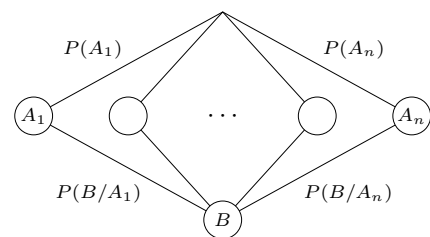
**4 La formule des probabilités totales**

Considérons  $n$  événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  qui constituent une *partition* de  $\Omega$  :



chaque éventualité réalise un seul des événements  $A_1, \dots, A_n$ . On dit alors que les événements  $A_1, \dots, A_n$  constituent un *système de constituants* de  $(\Omega, P)$ .

Si  $B \subset \Omega$  est un événement quelconque, alors :

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n).$$


**Exercice 19**

Un test de tuberculose a les caractéristiques suivantes :

- si on l'applique à un malade, le test est positif dans 95% des cas (avec une probabilité de 0,95);
- si on applique le test à une personne non atteinte de tuberculose, le test est quand même positif avec une probabilité de 0,04.

On examine à l'aide de ce test une population dont on sait que 0,1% des personnes sont atteints de tuberculose.

Si on choisit au hasard une personne dans cette population, quelle est la probabilité que le test soit positif?

**Exercice 20**

Une urne  $U_1$  contient trois boules blanches, 7 boules noires; l'urne  $U_2$  contient 4 boules blanches et 4 boules noires; l'urne  $U_3$  enfin contient 4 boules blanches et une boule noire.

On choisit au hasard une urne, et dans cette urne une boule; quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire?

**Exercice 21**

Dans une certaine population, 38% des individus ont une âge inférieur à 25 ans, 42% ont un âge compris entre 25 et 50 ans; 20% ont un âge supérieur à 50 ans. Exercent une profession : 32% du premier groupe, 74% du deuxième et 54% du troisième groupe.

Quel est le pourcentage de personnes exerçant une profession?

**Exercice 22**

Lors des élections municipales, une petite ville est subdivisée en cinq circonscriptions électorales. Le parti X aimerait connaître les intentions de vote et commande un sondage d'opinion. Voici les pourcentages :

circonscription	1	2	3	4	5
électeurs	20%	25%	20%	15%	20%
pour X	10%	5%	12%	8%	4%

Quel est le pourcentage d'électeurs dans cette ville qui ont l'intention de voter pour X?

**5 La formule des probabilités des causes**

**5.1 Une formule préliminaire**

Soient  $A$  et  $B$  des événements d'un espace probabilisé  $\Omega$ . Comparons les probabilités conditionnelles  $P(B/A)$  et  $P(A/B)$  :

$$P(B/A) \cdot P(A) = P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

On en déduit alors, en supposant  $P(B) \neq 0$  :

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B/A)$$

**Exercice 23**

Pendant 80% des jours ouvrables, un employé utilise le train pour rentrer chez lui. Dans deux tiers des cas, le train n'a aucun retard. En moyenne, l'employé rentre à temps trois jours (ouvrables) sur cinq.

Un soir, il rentre à temps : quelle est la probabilité qu'il ait pris le train?

**Exercice 24**

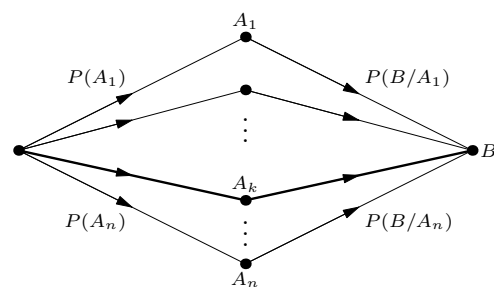
Une urne contient trois boules noires et deux boules blanches. On tire une boule dont on ne regarde pas la couleur. Sans remettre la première boule dans l'urne, on tire une deuxième, qui est blanche.

Quelle est la probabilité que la première boule soit blanche?

**5.2 La formule des probabilités des causes**

Considérons un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ . On observe un événement  $B$  dont on peut supposer qu'il est conséquence des causes possible  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Quelle est la probabilité que  $A_k$  soit la cause de  $B$ ? Représentons la situation par le graphe suivant :



La formule des probabilités des causes :

$$P(A_k/B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B/A_k) \cdot P(A_k)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

**Exercice 25**

- Un test médical a les caractéristiques suivantes :
- appliqué à une personne malade, le test est positif avec une probabilité de 0,99;

- appliqué à une personne non atteinte, le test est positif avec une probabilité de 0,03.

Considérons une population dont 0,01 % des personnes sont malades. Une personne se fait examiner à l'aide du test : il est positif.

Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

#### Exercice 26

Reprenons la situation de l'exercice 20. Supposons que l'on ait tiré une boule noire.

Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne  $U_1$  ?

#### Exercice 27

Un test médical a les caractéristiques suivantes :

- appliqué à une personne malade, le test est positif avec une probabilité de 0,96 ;
- appliqué à une personne non atteinte, le test est négatif avec une probabilité de 0,94.

Considérons une population dont 1 personne sur 145 est malade. Une personne se fait examiner à l'aide du test : il est positif.

Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

#### Exercice 28

On dispose de 1 000 000 pièces de monnaie dont une seule a le signe 1 sur les deux faces. On choisit au hasard une des pièces, on la lance 20 fois et on obtient 20 fois de suite 1.

Quelle est la probabilité que la pièce soit quand même bonne ?