

## Remarques préliminaires

### Un système de calcul formel

Nous allons étudier la *réduction de Jordan* à l'aide d'un *système de calcul formel*, **Pari-GP**.

L'avantage d'une telle approche réside dans la possibilité de pouvoir analyser les problèmes à des *niveaux de détail* différents : le calcul manuel nous oblige de nous situer toujours au même niveau (résolution de systèmes linéaires) tandis que les systèmes de calcul formel permettent de changer les composantes élémentaires des algorithmes.

**Pari-GP** par exemple nous permettra de calculer non seulement des déterminants, des traces, des rangs, mais surtout des noyaux et images d'endomorphismes, des intersections de sous-espaces, des supplémentaires.

Exactement ce qu'il nous faut pour permettre une approche élégante de la théorie de Jordan.

### Un peu de syntaxe

On peut distinguer dans **Pari-GP** différentes *couches de fonctionnalité* d'Algèbre Linéaire.

- La première couche concerne la *représentation* des objets linéaires fondamentaux, à savoir les vecteurs et les matrices.
- La deuxième couche concerne les *opérations* algébriques sur ces objets.
- La troisième couche concerne les opérations sur les sous-espaces vectoriels, représentés d'ailleurs par leurs bases.

### Représentation

La notation `[1,2,3]` représente un *vecteur-ligne* (une forme linéaire). Pour **Pari-GP**, c'est un objet de type `t_VEC`.

Le *vecteur-colonne* correspondant (un objet de type `t_COL`) se note `[1,2,3]~`, en utilisant l'opérateur de transposition `~` (qui existe aussi sous la forme `mattranspose`).

La *matrice*

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

enfin est représentée par

$$a = [3,4,3; -1,0,-1; 1,2,3]$$

C'est un objet de type `t_MAT`.<sup>1</sup>

Remarquons que la syntaxe `[1;2;3]` représente une *matrice*, ce n'est pas un *vecteur-colonne*.

Pour certaines matrices simples, **Pari-GP** offre des constructeurs simplifiés :

- `matid(n)` définit la matrice identité de dimension  $n$  ;
- `matdiagonal([a,b, ... ])` construit la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de la liste `[a,b, ... ]` ;
- `matcompanion(p)` construit la matrice compagnon associée à un polynôme  $p$ .

Si  $m$  représente une matrice, alors on accède à l'élément  $(i, j)$  de  $m$  à l'aide de la notation `m[i,j]`.

### Opérations élémentaires

**Pari-GP** permet de calculer des *combinaisons linéaires*, en utilisant les opérateurs usuels. De même, la multiplication matricielle, l'application d'une matrice à un vecteur est représentée par le symbole `*`.

<sup>1</sup>Le type d'un objet s'obtient d'ailleurs à l'aide de la fonction `type`.

Constructeurs

Accesseurs

Ainsi, par exemple, les matrices scalaires d'ordre  $n$ , c'est-à-dire les multiples de la matrice-identité  $\text{Id}_n$ , s'obtiennent tout naturellement par l'expression `a*matid(n)`.

La fonction `concat` permet de juxtaposer deux matrices (ou vecteurs).

La fonction `vecextract` permet d'extraire une sous-matrice de la matrice donnée.

On ne va pas détailler ici la syntaxe de ces fonctions puisque **Pari-GP** dispose d'un système d'aide : si l'on écrit par exemple

```
? vecextract
```

**Pari-GP** nous fournit l'information suivante :

```
vecextract(x,y,{z}): extraction of the components of the matrix
or vector x according to y and z. [ ... ]
```

### Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Remarquons que **Pari-GP** représente un *sous-espace vectoriel* par une *matrice* dont les vecteurs-colonnes représentent une *base* de ce sous-espace.

Voici les fonctions les plus importantes

- `matker(m)` est une base du *noyau* de la matrice  $m$  ;
- `matimage(m)` détermine une base de l'*image* de  $m$  ;
- `matsupplement(m)` complète la matrice  $m$  (dont les colonnes doivent être indépendantes) en une matrice inversible, définissant ainsi un *supplémentaire* de l'image de  $m$  ; on devra en général extraire la base du supplémentaire à l'aide de la fonction `vecextract` ;
- `matintersect(m,n)` définit une base de l'*intersection* des sous-espaces définis par les matrices  $m$  et  $n$ .

### Les paramètres descriptifs importants

**Pari-GP** permet aussi de calculer les paramètres numériques d'une matrice :

- `matdet(m)` calcule le *déterminant* d'une matrice carrée  $m$  ;
- `matrank(m)` calcule le *rang* de  $m$  ;
- `trace(m)` calcule la *trace* de  $m$ .

Remarquons d'ailleurs que, pour certaines opérations, par exemple les comparaisons, **Pari-GP** identifie une matrice-scalaire à sa valeur. Ainsi par exemple, la valeur de la comparaison (pour une matrice carrée  $m$ )

```
a*matadjoint(m) == matdet(m)
```

est « oui » (les booléens sont d'ailleurs représentés par 0 et 1).

On va noter dans ce qui suit parfois  $E$  l'espace vectoriel de référence  $\mathbb{C}^n$ , et 0 son sous-espace nul.

## 1 Un exemple en dimension 3

Considérons la matrice  $3 \times 3$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

dont le format de saisie **Pari-GP** est :

$$a = [3,4,3; -1,0,-1; 1,2,3]$$

La *réduite de Jordan* de  $a$  sera de la forme

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Il y a donc 5 éléments à déterminer, ceux de la diagonale principale, correspondant aux valeurs propres, ainsi que deux éléments dépendant de la composante nilpotente de  $a$ .

### 1.1 Les sous-espaces caractéristiques et la composante nilpotente

Calculons d'abord le *polynôme caractéristique* de  $a$  :

$$\mathbf{factor}(\mathbf{charpoly}(a))$$

Nous obtenons :  $(X - 2)^3$  : il n'y a qu'une seule valeur propre, ce qui permet déjà de préciser la forme de la *réduite de Jordan* :

$$\begin{bmatrix} 2 & * & 0 \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

où chacun des éléments représentés par  $*$  est soit 0 soit 1.

Déterminons les composantes *localement nilpotentes* de  $a$  ; il n'y en a qu'une seule dans notre cas :

$$n = a - 2 \cdot \mathbf{matid}(3)$$

La décomposition de l'espace en somme directe de *sous-espaces caractéristiques* est donc très simple : il n'y a qu'une seule valeur propre, 2, dont l'espace caractéristique est de dimension 3.

On vérifie que  $n^3 = 0$  et  $n^2 \neq 0$ . La matrice *nilpotente*  $n$  mesure l'écart entre  $a$  et une matrice *diagonalisable*.

### 1.2 Réduction de la composante nilpotente

#### 1.2.1 Calcul de la partition de la composante nilpotente

Étudions la suite (croissante, stationnaire) des noyaux :

$$0 \rightarrow \ker n \rightarrow \ker n^2 \rightarrow E$$

en commençant par calculer les dimensions et codimensions relatives :

$$\begin{aligned} \text{dimensions} &= [ \mathbf{matrank}(\mathbf{matker}(n)), \mathbf{matrank}(\mathbf{matker}(n^2)), \mathbf{matrank}(\mathbf{matker}(n^3)) ] \\ \text{codimensions} &= [ \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[2] - \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[3] - \text{dimensions}[2] ] \end{aligned}$$

Remarquons que les dimensions des noyaux, appelées aussi *nullités*, peuvent évidemment être calculées (de manière plus efficace) par

$$\text{dimensions} = [ 3 - \mathbf{matrank}\{n\}, 3 - \mathbf{matrank}\{n^2\}, 3 - \mathbf{matrank}\{n^3\} ]$$



**factor**, parce que ce sont les racines du polynôme et leurs multiplicités qui nous intéressent.

**matid(n)** est la *matrice identité* de dimension  $n$

La suite des codimensions, qui contrôle le déroulement des calculs ultérieurs, est  $[1, 1, 1]$  :

$$0 \xrightarrow{1} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

Nous connaissons donc la *partition* de la dimension de  $E$ , associée à l'endomorphisme nilpotent  $n : [3]$ , ce qui signifie que la réduite de Jordan de  $a$  ne contient qu'un seul bloc de dimension 3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### 1.2.2 Calcul de la matrice de changement de base

$\ker n^2$  étant de codimension 1 dans  $\ker n^3 = E$ , nous calculons un supplémentaire de  $\ker n^2$  :

$$\text{co} = \text{matsupplement}(\text{matker}(n^2))$$

La fonction **matsupplement** nous fournit comme résultat une *matrice* dont les deux premières colonnes représentent une base de  $\ker n^2$ , et dont la troisième colonne représente une base du supplémentaire ; c'est cette colonne que nous allons extraire de cette matrice :

$$e = \text{vecextract}(\text{co}, [3])$$

La théorie nous permet d'affirmer que la suite  $(n^2 \cdot e, n \cdot e, e)$  est *libre* :

$$0 \xrightarrow{1} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$$n^2 \cdot e \quad n \cdot e \quad e$$

**Pari-GP** nous permet d'en faire la vérification en calculant le rang de cette famille :

$$\text{matrank}(\text{concat}([n^2 \cdot e, n \cdot e, e]))$$

qui est effectivement 3.

En particulier :  $n^2 \cdot e \neq 0$  ; autrement dit :  $n \cdot e$  est un élément de  $\ker n^2$  qui n'appartient pas à  $\ker n$ . Comme  $\ker n$  est de co-dimension 1 dans  $\ker n^2$ ,  $n \cdot e$  engendre donc un supplémentaire de  $\ker n$  dans  $\ker n^2$ . Ensuite, le vecteur  $n^2 \cdot e$  est un élément non nul du 1-espace  $\ker n$ , c'en est donc une base ; nous avons terminé.

Recollons donc les morceaux :  $q = [n^2 \cdot e \mid n \cdot e \mid e]$

$$q = \text{concat}([n^2 \cdot e, n \cdot e, e])$$

Ainsi,  $q$  est la matrice (inversible) dont les colonnes sont les vecteurs (linéairement indépendants)  $n^2 \cdot e, n \cdot e, e$ , pris dans cet ordre :

$$q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.2.3 Réduction

Dans la base définie par  $q$ , la matrice nilpotente  $n$  s'écrit :

$$q^{-1} \cdot n \cdot q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La *réduite de Jordan* de la matrice  $a$  s'en déduit immédiatement par *conjugaison* :

**matker(m)** calcule le *noyau* de la matrice  $m$

**matrank(m)** calcule le *rang* de  $m$

**matsupplement(m)** calcule l'espace *supplémentaire* de l'image de  $m$  par rapport à  $E$

**concat([a,b, ... ])** transforme la *liste* de vecteurs en la *matrice* correspondante

$$q^{-1} \cdot a \cdot q$$

c'est-à-dire

$$q^{-1} \cdot a \cdot q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = q^{-1} \cdot n \cdot q + 2 \cdot Id_3$$

conformément à nos attentes.

## 2 Un autre exemple en dimension 3



Considérons maintenant la matrice  $3 \times 3$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### 2.1 Les sous-espaces caractéristiques et la composante nilpotente

Le *polynôme caractéristique* de  $a$  est  $(X - 3)^2(X - 2)$ , ce qui permet déjà de conclure que la *réduite de Jordan* de notre matrice sera de la forme

$$\begin{bmatrix} 3 & * & 0 \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

où chacun des éléments représentés par  $*$  est soit 0 soit 1. Déterminons les *composantes localement nilpotentes* de  $a$  :

$$\begin{aligned} a_1 &= a - 3 \cdot \text{matid}(3) \\ a_2 &= a - 2 \cdot \text{matid}(3) \end{aligned}$$

Les *sous-espaces caractéristiques* sont les *noyaux* de ces endomorphismes. **Pari-GP** permet de calculer une *base* de ces espaces :

$$\begin{aligned} \text{base1} &= \text{matker}(a_1^2) \\ \text{base2} &= \text{matker}(a_2) \end{aligned}$$

À l'aide de ces bases, nous allons construire une première *matrice de passage*  $p$

$$p = \text{concat}(\text{base1}, \text{base2})$$

qui transforme  $a$  en une matrice  $p^{-1} \cdot a \cdot p$  formée de deux blocs,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dont nous extrayons la composante *nilpotente* :

$$n = p^{-1} \cdot a \cdot p - \text{matdiagonal}([3, 3, 2])$$

On a ici, conformément à nos attentes :  $n^2 = 0$ .

### 2.2 Réduction de la composante nilpotente

#### 2.2.1 Calcul de la partition de la composante nilpotente

Étudions la suite  $0 \rightarrow \ker n \rightarrow E$

$$\begin{aligned} \text{dimensions} &= [ \text{matrank}(\text{matker}(n)), \text{matrank}(\text{matker}(n^2)) ] \\ \text{codimensions} &= [ \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[2] - \text{dimensions}[1] ] \end{aligned}$$

Nous utilisons ici une deuxième forme syntaxique de **concat**

**matdiagonal**([a,b, ...]) construit la matrice diagonale avec les éléments  $a, \dots$

Nous obtenons la suite des codimensions :  $[2, 1]$ .

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2$$

Nous connaissons donc la *partition* de la dimension de  $E$ , associée à l'endomorphisme nilpotent  $n$  :  $[2, 1]$ , ce qui signifie que la réduite de Jordan de  $a$  contient un bloc de dimension 2 et un bloc de dimension 1 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## 2.2.2 Calcul de la matrice de changement de base

$\ker n$  étant de codimension 1 dans  $\ker n^2 = E$ , nous calculons un *supplémentaire* de  $\ker n$  (dans  $\ker n^2$ ) :

$$\text{co} = \text{matsupplement}(\text{matker}(n))$$

Le supplémentaire étant de dimension 1, c'est le troisième vecteur de base dont nous avons besoin :

$$e = \text{vecextract}(\text{co}, [3])$$

Illustrons la situation par un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{2} & \ker n & \xrightarrow{1} & E \\ & & n \cdot e & & e \end{array}$$

$n \cdot e$  est alors un élément de  $\ker n$ , qui est de dimension 2 ; complétons donc  $n \cdot e$  en une base de  $\ker n$ . Exprimé autrement, nous allons calculer un supplémentaire de l'espace engendré par  $n \cdot e$  dans  $\ker n$ .

Calculons d'abord un supplémentaire de l'espace engendré par  $n \cdot e$  relativement à l'espace tout entier :

$$\text{co2} = \text{vecextract}(\text{matsupplement}(n \cdot e), [2,3])$$

Il nous reste à calculer la trace de ce supplémentaire sur  $\ker n$  pour obtenir un supplémentaire relativement à  $\ker n$  :

$$f = \text{matintersect}(\text{co2}, \text{matker}(n))$$

Voici l'état actuel de notre construction :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{2} & \ker n & \xrightarrow{1} & \ker n^2 \\ & & n \cdot e & & e \\ & & f & & \end{array}$$

Recollons les morceaux :  $q = [n \cdot e \mid e \mid f]$

$$q = \text{concat}([n \cdot e, e, f])$$

Nous obtenons la matrice :

$$q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

qui transforme la matrice nilpotente  $n$  en sa forme canonique  $q^{-1} \cdot n \cdot q$  :

$$q^{-1} \cdot n \cdot q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La *réduite de Jordan* s'obtient donc en deux étapes : une première conjugaison par  $p$  ramène  $a$  à ses sous-espaces caractéristiques, une deuxième conjugaison par  $q$  réduit sa composante nilpotente à sa forme standard. Finalement, la conjugaison par  $p \cdot q$

**matintersect(b1, b2)**  
nous fournit une base de l'intersection des espaces dont des bases sont  $b_1$  et  $b_2$

$$(p \cdot q)^{-1} \cdot a \cdot (p \cdot q)$$

transforme  $a$  en sa forme de Jordan :

$$(p \cdot q)^{-1} \cdot a \cdot (p \cdot q) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### 3 Un exemple en dimension 4



Considérons la matrice  $4 \times 4$

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 & -2 \\ -3 & 6 & -20 & -7 \\ 0 & 2 & -10 & -4 \\ -3 & -3 & 22 & 9 \end{bmatrix}$$

dont la réduite de Jordan sera de la forme

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

#### 3.1 Les sous-espaces caractéristiques et la composante nilpotente

Le *polynôme caractéristique* de  $a$  est  $(X - 2)^3 \cdot (X - 1)$ .

La réduite de Jordan de  $a$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} 2 & * & 0 & 0 \\ 0 & 2 & * & 0 \\ 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les composantes *localement nilpotentes* de  $a$  sont

$$a_1 = a - 2 \cdot \text{matid}(4)$$

$$a_2 = a - 1 \cdot \text{matid}(4)$$

Les *sous-espaces caractéristiques* :

$$\text{base}_1 = \text{matker}(a_1^3)$$

$$\text{base}_2 = \text{matker}(a_2)$$

permettent de définir une *matrice de passage*  $p$

$$p = \text{concat}(\text{base}_1, \text{base}_2)$$

qui transforme  $a$  en une matrice formée de deux blocs ; extrayons la *composante nilpotente* :

$$n = p^{-1} \cdot a \cdot p - \text{matdiagonal}([2, 2, 2, 1])$$

Nous obtenons :

$$n = \begin{bmatrix} 2 & -12 & -4 & 0 \\ 2 & -12 & -4 & 0 \\ -5 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observons que  $n^2 = 0$ , l'indice de nilpotence de  $n$  est 2.

### 3.2 Réduction de la composante nilpotente

#### 3.2.1 Calcul de la partition de la composante nilpotente

Étudions la suite  $0 \rightarrow \ker n \rightarrow E$  :

$$\begin{aligned} \text{dimensions} &= [ \text{matrank}(\text{matker}(n)), \text{matrank}(\text{matker}(n^2)) ] \\ \text{codimensions} &= [ \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[2] - \text{dimensions}[1] ] \end{aligned}$$

Nous obtenons la suite des codimensions :  $[3, 1]$ .

D'où :

$$0 \xrightarrow{3} \ker n \xrightarrow{1} E$$

Ainsi, la partition caractérisant l'endomorphisme nilpotent  $n$  est  $[2, 1, 1]$ , ce qui permet de déterminer complètement la réduite de Jordan :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 3.2.2 Calcul de la matrice de changement de base

ker  $n$  étant de codimension 1 dans  $\ker n^2 = E$ , nous calculons un supplémentaire du 3-espace  $\ker n$  ;

$$\begin{aligned} \text{co} &= \text{matsupplement}(\text{matker}(n)) \\ \text{e} &= \text{vecextract}(\text{co}, [4]) \end{aligned}$$

Illustrons la situation par un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{3} & \ker n & \xrightarrow{1} & \ker n^2 \\ & & n \cdot e & & e \end{array}$$

$n \cdot e$  est alors un élément de  $\ker n$  ;  $\ker n$  est de dimension 3 ; nous devons donc compléter  $n \cdot e$  par deux vecteurs en une base de  $\ker n$

$$\begin{aligned} \text{co2} &= \text{vecextract}(\text{matsupplement}(n \cdot e), \text{"^1"}) \\ \text{fg} &= \text{matintersect}(\text{co2}, \text{matker}(n)) \end{aligned}$$

"^1" : Nous extrayons tout sauf la première composante.

Schématiquement :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{3} & \ker n & \xrightarrow{1} & \ker n^2 \\ & & n \cdot e & & e \\ & & f & & \\ & & g & & \end{array}$$

Recollons les morceaux :  $q = [n \cdot e \mid e \mid f \mid g]$

$$q = \text{concat}([n \cdot e, e, fg])$$

En conjuguant par  $p \cdot q$

$$(p \cdot q)^{-1} \cdot a \cdot (p \cdot q)$$

nous obtenons finalement la réduite de Jordan de  $a$  :

$$(p \cdot q)^{-1} \cdot a \cdot (p \cdot q) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4 Un autre exemple en dimension 4



Considérons la matrice  $4 \times 4$  (triangulaire supérieure)

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### 4.1 Construction de la composante nilpotente

Le polynôme caractéristique de  $a$  est  $(X - 1)^3 \cdot (X + 1)^1$ .

Les composantes localement nilpotentes de  $a$  sont

$$a1 = a - 1 \cdot \text{matid}(4)$$

$$a2 = a + 1 \cdot \text{matid}(4)$$

Les sous-espaces caractéristiques de  $a$

$$\text{base1} = \text{matker}(a1^3)$$

$$\text{base2} = \text{matker}(a2)$$

permettent de définir une matrice de passage  $p$  :

$$p = \text{concat}(\text{base1}, \text{base2})$$

Relativement à cette base, la composante nilpotente de  $a$ ,

$$n = p^{-1} \cdot a \cdot p - \text{matdiagonal}([1, 1, 1, -1])$$

est donc :

$$n = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que  $n^3 = 0$ , mais que  $n^2 \neq 0$ .

### 4.2 Réduction de la composante nilpotente

Étudions la suite  $0 \rightarrow \ker n \rightarrow \ker n^2 \rightarrow \ker n^3$  :

$$\text{dimensions} = [\text{matrank}(\text{matker}(n)), \text{matrank}(\text{matker}(n^2)), \text{matrank}(\text{matker}(n^3))] ]$$

$$\text{codimensions} = [\text{dimensions}[1], \text{dimensions}[2] - \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[3] - \text{dimensions}[2]]$$

On obtient la suite des codimensions :  $[2, 1, 1]$  :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$\ker n^2$  étant de codimension 1 dans  $\ker n^3 = E$ , nous calculons un supplémentaire du 3-espace  $\ker n^2$  ;

$$\text{co} = \text{matsupplement}(\text{matker}(n^2))$$

$$e = \text{vecextract}(\text{co}, [4])$$

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$$n^2 \cdot e \qquad n \cdot e \qquad e$$

$n \cdot e$  est alors un élément de  $\ker n^2$ , mais n'appartient pas à  $\ker n$  ;  $\ker n$  est de co-dimension 1 dans  $\ker n^2$  ;  $n \cdot e$  définit donc une base d'un supplémentaire de  $\ker n$ .

Ensuite,  $n^2 \cdot e$  est un élément non nul de  $\ker n$ , qui est de dimension 2 ; il nous faut un deuxième vecteur de base :  $f$

```
co2 = vecextract( matsupplement(n*n*e), [2, 3, 4])
f = matintersect(co2, matker(n))
```

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$$\begin{array}{cccc} & & n^2 \cdot e & n \cdot e & e \\ & & f & & \end{array}$$

Recollons les morceaux :  $q = [n^2 \cdot e \mid n \cdot e \mid e \mid f]$

```
q = concat([ n^2*e, n*e, e, f ] )
```

La réduite de Jordan

```
(p*q)^(-1)*a*(p*q)
```

est enfin :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## 5 Un troisième exemple en dimension 4



Considérons la matrice  $4 \times 4$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dont le format de saisie **Pari-GP** est :

```
a = [1,0,2,0; 2,1,3,0; 0,0,1,0; 0,0,0,1]
```

### 5.1 Les sous-espaces caractéristiques et la composante nilpotente

Calculons d'abord le *polynôme caractéristique* de  $a$  :

```
factor(charpoly(a))
```

Nous obtenons :  $(X - 1)^4$ .

Déterminons les composantes *localement nilpotentes* de  $a$  ; il n'y en a qu'une seule dans notre cas :

```
n = a - matid(4)
```

La décomposition de l'espace en somme directe de *sous-espaces caractéristiques* est donc très simple : il n'y a qu'une seule valeur propre, 1, dont l'espace caractéristique est de dimension 4.

On vérifie que  $n^3 = 0$  et  $n^2 \neq 0$ . La matrice *nilpotente*  $n$  mesure l'écart entre  $a$  et une matrice *diagonalisable*.

### 5.2 Réduction de la composante nilpotente

Étudions la suite des noyaux :  $0 \rightarrow \ker n \rightarrow \ker n^2 \rightarrow E$

```
dimensions = [ matrank(matker(n)), matrank(matker(n^2)), matrank(matker(n^3)) ]
codimensions = [ dimensions[1], dimensions[2]-dimensions[1], dimensions[3]-dimensions[2] ]
```

Nous obtenons la suite des codimensions, [2, 1, 1], qui contrôle le déroulement des calculs ultérieurs :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} E$$

$\ker n^2$  étant de codimension 1 dans  $\ker n^3 = E$ , nous calculons un supplémentaire de  $\ker n^2$  ;

```
co = matsupplement(matker(n^2))
e = vecextract(co, [4])
```

ce qui donne déjà

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} E$$

$$n^2 \cdot e \quad n \cdot e \quad e$$

Comme  $\ker n$  est de co-dimension 1 dans  $\ker n^2$ ,  $n \cdot e$  engendre donc un supplémentaire de  $\ker n$  dans  $\ker n^2$ .

Ensuite, le vecteur  $n^2 \cdot e$  est un élément non nul du 2-espace  $\ker n$ , nous devons donc déterminer un deuxième vecteur  $f$  pour obtenir une base de  $\ker n$  :

```
co2 = vecextract(matsupplement(n^2*e), [2,3,4])
f = matintersect(co2, matker(n))
```

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{1} \ker n^2 \xrightarrow{1} E$$

$$n^2 \cdot e \quad n \cdot e \quad e$$

$$f$$

Recollons donc les morceaux :  $q = [n^2 \cdot e \mid n \cdot e \mid e \mid f]$ , c'est-à-dire en utilisant la syntaxe **Pari-GP** :

```
q = concat([n^2*e, n*e, e, f])
```

Voici enfin la *réduite de Jordan* de notre matrice :

$$q^{-1} \cdot a \cdot q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6 Un exemple en dimension 5

Considérons la matrice  $5 \times 5$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

dont le format de saisie **Pari-GP** est :

```
a = [ 0, 0, 0, 0, 1; \
      -4, 2, 0, 1, 2; \
      0, 0, 5, -9, 0; \
      0, 0, 1, -1, 0; \
      -4, 0, 0, 0, 4]
```



### 6.1 Construction de la composante nilpotente

Le polynôme caractéristique de  $a$

**factor(charpoly(a))**

est  $(X - 2)^5$ .

Posons donc

**n = a - 2\*matid(5)**

On vérifie que  $n^3 = 0$ .

### 6.2 Réduction de la composante nilpotente

Considérons pour la suite des noyaux

$$0 \hookrightarrow \ker n \hookrightarrow \ker n^2 \hookrightarrow E$$

les dimensions et codimensions respectives :

**dims(n)**  
**codims(n)**

La suite des codimensions est donc :  $[2, 2, 1, 0, 0]$  :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{2} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

Comme  $\ker n^2$  est de codimension 1, le supplémentaire est défini par un seul vecteur :

**co = matsupplement(matker(n^2))**  
**e = vecextract(co, [5])**

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{2} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$$\begin{array}{ccc} n^2 \cdot e & n \cdot e & e \end{array}$$

Comme  $\ker n$  est de codimension 2 dans  $\ker n^2$ , il nous faut déterminer, à côté de  $n \cdot e$ , un deuxième vecteur  $f$  pour obtenir une base d'un supplémentaire de  $\ker n$  dans  $\ker n^2$  :

**co2 = vecextract( matsupplement( concat(matker(n), n\*e) ), [4,5])**  
**f = matintersect(co2, matker(n^2))**

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{2} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$$\begin{array}{ccc} n^2 \cdot e & n \cdot e & e \\ n \cdot f & f & \end{array}$$

$[n^2 \cdot e, n \cdot f]$  est une famille libre de  $\ker n$ ; comme  $\ker n$  est de dimension 2, le processus de construction s'achève.

Recollons donc les morceaux :  $q = [n^2 \cdot e \mid n \cdot e \mid e \mid n \cdot f \mid f]$  c'est-à-dire, dans la syntaxe **Pari-GP** :

**q = concat( [ n^2\*e, n\*e, e, n\*f, f ] )**

La réduite de Jordan de  $a$  s'obtient finalement en conjuguant à l'aide de la matrice  $p \cdot q$  :

$$q^{-1} \cdot a \cdot q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## 7 Un autre exemple en dimension 5



Considérons la matrice  $5 \times 5$

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### 7.1 Construction de la composante nilpotente de $a$

Calculons d'abord le polynôme caractéristique de  $a$  :

**factor(charpoly(a))**

Nous obtenons :  $(X - 2)^3(X + 1)^2$ .

Déterminons les composantes localement nilpotentes de  $a$  :

$$a1 = a - 2 \cdot \text{matid}(5)$$

$$a2 = a + 1 \cdot \text{matid}(5)$$

L'espace  $E$  est somme directe des sous-espaces caractéristiques :

$$\text{base1} = \text{matker}(a1^3)$$

$$\text{base2} = \text{matker}(a2^2)$$

qui permettent donc de définir une matrice de passage  $p$

$$p = \text{concat}(\text{base1}, \text{base2})$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{9} & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{9} & -\frac{244}{27} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui transforme  $a$  en une matrice formée de deux blocs.

Extrayons la composante nilpotente :

$$n = p^{-1}(-1) \cdot a \cdot p - \text{matdiagonal}([2, 2, 2, -1, -1])$$

$$n = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

qui vérifie :  $n^3 = 0$  (bien sûr), mais  $n^2 \neq 0$ .

### 7.2 Réduction de la composante nilpotente

Considérons pour la suite des noyaux

$$0 \leftrightarrow \ker n \leftrightarrow \ker n^2 \leftrightarrow \ker n^3$$

les dimensions et codimensions respectives :

$$\text{dimensions} = [ \text{matrank}(\text{matker}(n)), \text{matrank}(\text{matker}(n^2)), \text{matrank}(\text{matker}(n^3)) ]$$

$$\text{codimensions} = [\text{dimensions}[1], \text{dimensions}[2] - \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[3] - \text{dimensions}[2]]$$

On obtient la suite  $[2, 2, 1]$  :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{2} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$\ker n^2$  étant de codimension 1 dans  $\ker n^3 = E$ , nous calculons un supplémentaire du 4-espace  $\ker n^2$  :

```
co = matsupplement(matker(n^2))
e = vecextract(co, [5])
```

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{2} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$$n^2 \cdot e \quad n \cdot e \quad e$$

$n \cdot e$  est alors un élément de  $\ker n^2$ ;  $\ker n$  est de co-dimension 2 dans  $\ker n^2$ ; nous devons donc compléter  $n \cdot e$  par un vecteur  $f$  en une base  $[n \cdot e, f]$  de  $\ker n^2 / \ker n$  :

```
co2 = vecextract( matsupplement(concat(matker(n), n*e)), [4,5])
f = matintersect(co2, matker(n^2))
```

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{2} \ker n \xrightarrow{2} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

$$n^2 \cdot e \quad n \cdot e \quad e$$

$$n \cdot f \quad f$$

$[n^2 \cdot e, n \cdot f]$  est une famille libre de  $\ker n$ ; comme  $\ker n$  est de dimension 2, le processus de construction s'achève.

Recollons donc les morceaux :  $q = [n^2 \cdot e \mid n \cdot e \mid e \mid n \cdot f \mid f]$ , c'est-à-dire, dans la syntaxe **Pari-GP** :

```
q = concat( [ n^2*e, n*e, e, n*f, f ] )
```

La réduite de Jordan de  $a$  s'obtient finalement en conjuguant à l'aide de la matrice  $p \cdot q$  :

```
(p*q)^(-1)*a*(p*q)
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## 8 Un exemple en dimension 6

Considérons la matrice  $6 \times 6$  définie par

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 0 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

### 8.1 Construction de la composante nilpotente

Le polynôme caractéristique de  $a$  est  $(X - 1)^6$ . La composante nilpotente  $n$  de  $a$  est donc

```
n = a - matid(6)
```

On vérifie que  $n^4 = 0$  et que  $n^3 \neq 0$ .





### 9.1 Construction de la composante nilpotente

Le polynôme caractéristique de  $a$  est  $(X - 1)^3 \cdot (X + 1)^3$ .  
Les composantes localement nilpotentes de  $a$  sont donc :

$$\begin{aligned} a1 &= a - \text{matid}(6) \\ a2 &= a + \text{matid}(6) \end{aligned}$$

Les sous-espaces caractéristiques de  $a$  admettent les bases

$$\begin{aligned} \text{base1} &= \text{matker}(a1^3) \\ \text{base2} &= \text{matker}(a2^3) \end{aligned}$$

En conjuguant par

$$p = \text{concat}(\text{base1}, \text{base2})$$

nous pouvons déterminer la composante nilpotente  $n$  de  $a$  :

$$n = p^{-1} \cdot a \cdot p - \text{matdiagonal}([1, 1, 1, -1, -1, -1])$$

$$n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous savons que  $n^3 = 0$  mais que  $n^2 \neq 0$ .

### 9.2 Réduction de la composante nilpotente

Étudions maintenant la suite des noyaux :  $0 \rightarrow \ker n \rightarrow \ker n^2 \rightarrow \ker n^3$ .

$$\begin{aligned} \text{dimensions} &= [ \text{matrank}(\text{matker}(n)), \text{matrank}(\text{matker}(n^2)), \text{matrank}(\text{matker}(n^3)) ] \\ \text{codimensions} &= [ \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[2] - \text{dimensions}[1], \text{dimensions}[3] - \text{dimensions}[2] ] \end{aligned}$$

La suite des codimensions  $[3, 2, 1]$  permet de compléter notre diagramme des noyaux :

$$0 \xrightarrow{3} \ker n \xrightarrow{2} \ker n^2 \xrightarrow{1} \ker n^3$$

Calculons d'abord un vecteur engendrant un supplémentaire de  $\ker n^2$  dans  $E$  :

$$\begin{aligned} \text{co} &= \text{matsupplement}(\text{matker}(n^2)) \\ e &= \text{vecextract}(\text{co}, [6]) \end{aligned}$$

Illustrons la situation à l'aide de notre diagramme des noyaux :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{3} & \ker n & \xrightarrow{2} & \ker n^2 & \xrightarrow{1} & \ker n^3 \\ & & n^2 \cdot e & & n \cdot e & & e \end{array}$$

Le vecteur  $n \cdot e$  est un vecteur de  $\ker n^2$  qui n'appartient pas à  $\ker n$ ; nous avons donc besoin, d'après la liste des codimensions, d'un deuxième vecteur, pour construire un supplémentaire de  $\ker n$  dans  $\ker n^2$  :

$$\begin{aligned} \text{co2} &= \text{matsupplement}(\text{matker}(n)) \\ f &= \text{vecextract}(\text{matintersect}(\text{co2}, \text{matker}(n^2)), [4]) \end{aligned}$$

Remarquons que la construction précédente ne garantit pas que  $f$  soit linéairement indépendant de  $n \cdot e$ . Voici une variante qui permet d'éviter cette éventualité : nous adjoignons au 3-espace  $\ker n$  le vecteur  $n \cdot e$  et nous calculons un supplémentaire de ce sous-espace relativement à  $\ker n^2$  :

$$\begin{aligned} \text{co2} &= \text{vecextract}(\text{matsupplement}(\text{concat}(\text{matker}(n), n \cdot e)), [5, 6]) \\ f &= \text{matintersect}(\text{co2}, \text{matker}(n^2)) \end{aligned}$$

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{3} \begin{array}{c} \ker n \\ n^2 \cdot e \\ n \cdot f \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{c} \ker n^2 \\ n \cdot e \\ f \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{c} \ker n^3 \\ e \end{array}$$

Enfin,  $n \cdot (n \cdot e)$  et  $n \cdot f$  sont deux vecteurs linéairement indépendants de  $\ker n$  ; nous allons compléter ces deux vecteurs par un troisième vecteur en une base de  $\ker n$  :

$$\begin{aligned} \text{co3} &= \text{vecextract}(\text{matsupplement}(\text{concat}(n*n*e, n*f)), [3,4,5,6]) \\ \text{g} &= \text{matintersect}(\text{co3}, \text{matker}(n)) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \text{co3} &= \text{matsupplement}(\text{concat}([n^2*e, n*f])) \\ \text{g} &= \text{vecextract}(\text{matintersect}(\text{co3}, \text{matker}(n)), [3]) \end{aligned}$$

Schématiquement :

$$0 \xrightarrow{3} \begin{array}{c} \ker n \\ n^2 \cdot e \\ n \cdot f \\ g \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{c} \ker n^2 \\ n \cdot e \\ f \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{c} \ker n^3 \\ e \end{array}$$

D'où enfin la matrice  $q$  qui permettra de jordaniser  $n$  :

$$q = \text{concat}([n*n*e, n*e, e, n*f, f, g])$$

En conjuguant par  $p \cdot q$ ,

$$q \hat{(-1)} * p \hat{(-1)} * a * p * q$$

nous obtenons finalement la réduite de Jordan de  $a$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$