

Table des matières

1 Croissance — décroissance	1
2 Aspects algébriques	2
2.1 Transformations d'expressions	2
2.2 Un mot sur les calculatrices	2
2.3 Équations et inéquations	2
2.4 Dérivation	3
3 Aspects analytiques — Études de fonctions	4
3.1 Graphiques	4
3.2 Domaines de définition	5
3.3 Limites	6
3.3.1 Série I	6
3.3.2 Série II	7

1 Croissance — décroissance

On parle d'un *phénomène à croissance exponentielle (ou géométrique)* lorsque la croissance (en valeur absolue) de la population est *proportionnelle* à la population existante, c'est-à-dire lorsque le *taux de croissance* est constant.

Exercice 1

Imaginez que Nadia ait placé 1 € en l'an 1 à un taux de 2% (intérêts composés), et qu'elle aille prélever le capital avec tous les intérêts au bout de 2 000 ans.

1. Pensez-vous qu'elle disposera des moyens nécessaires pour financer un bon repas? des vacances pour toute la famille? ou ...?
2. Calculez son capital après 100 ans, 200 ans, ... et représentez cette suite.
3. À quel moment son capital a-t-il dépassé 10 €? 1 000 €? 1 000 000 €?

Exercice 2

Helge place 1 € à un taux d'intérêt annuel de 100%. Calculez son capital au bout de un an si les intérêts sont ajoutés

1. en une fois, à la fin de l'année
2. en deux fois, chaque fois au bout de 6 mois
3. en trois fois, chaque fois au bout de 4 mois
4. en 4 fois, chaque fois au bout de 3 mois
5. en 365 fois, à la fin de chaque jour
6. au bout de chaque heure
7. en n fois, ...

Exercice 3

Le *taux annuel de croissance* de la population mondiale était de 1,2% par an en 2003.

1. Sachant que la population mondiale en 2003 était 6,3 milliards et en supposant que le taux annuel reste constant, déterminez (en milliards) l'effectif de la population mondiale en l'an 2010, 2020, ...
2. Représentez cette suite.
3. En supposant toujours que le taux de croissance ne change pas, après combien d'années la population mondiale aura-t-elle doublé?

Exercice 4

La *demi-vie* (ou : *période de désintégration*) d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon de cet élément est divisée par 2.

1. Un échantillon contient 5 g de radium. Quelle sera la masse de radium dans 3 000, 4 500, ... ans sachant que la période de désintégration du radium est de 1 500 ans?
2. La période de désintégration d'un isotope d'iode est de 8 jours. Quelle était, il y a 6 mois, la masse de cet isotope dans un échantillon qui en renferme aujourd'hui 1 g?

Exercice 5

L'iode naturel est composé de l'isotope stable ^{127}I . Les autres isotopes de l'iode sont tous radioactifs. Bien qu'il ait une faible durée de demi-vie, l'iode 131 émis lors des accidents nucléaires (dont celui de Tchernobyl) pose problème en raison du fait que la thyroïde fixe une grande partie de l'iode absorbé via l'alimentation, l'eau ou l'inhalation. L'iode est alors facteur de cancer ou troubles graves de la thyroïde. L'isotope radioactif d'iode ^{131}I perd 8,3% de sa masse par jour.

1. Calculez la *demi-vie* T de l'iode 131.
2. Représentez graphiquement l'évolution au cours du temps d'un échantillon de 50 mg de ^{131}I .
3. Montrez que la fonction qui décrit l'évolution d'un échantillon d'iode 131 peut être mise sous la forme

$$t \mapsto K \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

Exercice 6

Déterminez l'entier naturel n tel que

$$10^n < 2^{500} < 10^{n+1}$$

Quel est donc le nombre de *chiffres décimaux* de l'entier 2^{500} ?

2 Aspects algébriques

2.1 Transformations d'expressions

Exercice 7

Écrivez les nombres suivants sans exposant négatif, ni fractionnaire et simplifiez les expressions obtenues autant que possible :

1. 3^{-2}
2. $3^{0,75}$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1,25}$
4. $9^{-\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$
5. $\frac{4^{-0,5} \cdot 16^{\frac{1}{4}}}{320,2}$
6. $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt{9}}$

Exercice 8

Complétez les équivalences suivantes :

1. $\log 10\,000 = \square \iff 10^\square = 10\,000$
2. $\log \square = -3 \iff \square^\square = \frac{1}{1\,000}$
3. $10^\square = \sqrt{10} \iff \log \sqrt{10} = \square$
4. $10^\square = 100\sqrt{10} \iff \log \sqrt{100\sqrt{10}} = \square$
5. $2^\square = 1\,024 \iff \log_2 1\,024 = \square$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^\square = 1\,024 \iff \log_{\frac{1}{2}} 1\,024 = \square$
7. $\sqrt{\square} = 3 \iff \log_\square(3) = \square$
8. $\sqrt{\sqrt{\square}} = 3 \iff \log_\square(3) = \frac{1}{4}$
9. $\sqrt[3]{\square} = 81 \iff \log_{\sqrt[3]{\square}}(81) = \square$
10. $5^2 = \square \iff \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{25}\right) = \square$
11. $\log_5(625) = \square \iff \log_{625}(5) = \square$
12. $e^\square = \sqrt{e} \iff \ln \sqrt{e} = \square$
13. $\square^{-3} = \frac{1}{e^3} \iff \ln \square = -3$
14. $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^\square \iff \square^{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}} = -\frac{2}{3}$

Exercice 9

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\ln e - \ln e^2 - \frac{1}{\ln e} + \ln^2 \frac{1}{e}$
2. $e^{3\ln 2} + e^{-\ln 5} - (\ln e)^2$
3. $\ln(\sqrt{e^{-5}})$
4. $\ln(e^{\sqrt{e}})$
5. $\left(\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)^2$

Exercice 10

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\log_5(5^3)$
2. $\log_5(125)$
3. $\log_5 \sqrt{125}$
4. $\log_5 \frac{1}{\sqrt{125}}$
5. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125}$
6. $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{\sqrt{125}}$
7. $\log_{\frac{5}{4}} 0,64$
8. $\log_{0,64} \frac{5}{4}$
9. $\log_{0,5} 32$
10. $\log_{32} 0,5$
11. $\log_{2\sqrt{3}} 144$
12. $\log_{144}(2\sqrt{3})$
13. $\exp_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 1\right)$
14. $\exp_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 8\right)$

Exercice 11

Soit $x > 0$. En posant $u = \log_2 x$, exprimez en fonction de u :

1. $\log_2 x^2$
2. $\log_2^2 x$
3. $\log_2 \frac{x^3}{64}$
4. $\log_2 \sqrt{2x}$
5. $\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$
6. $\log_2(x^2 \sqrt{x})$

Exercice 12

Soit $a, b, c > 0$. Posons :

$$u = \ln a, \quad v = \ln b, \quad w = \ln c$$

Exprimez en fonction de u, v, w (linéarisation) :

1. $\ln ab^2c$
2. $\ln \frac{ab}{c^2}$
3. $\ln \left(\frac{ab}{c}\right)^2$
4. $\ln \sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}$
5. $\left(\ln \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}\right)^2$

2.2 Un mot sur les calculatrices

Exercice 13

Comparez les résultats affichés par votre calculatrice si vous évaluez les expressions suivantes :

1. $3 \wedge 0.75$
2. $2 \wedge -3$
3. $3 \wedge 3/4$
4. $2 \wedge -3.$
5. $3 \wedge (3/4)$
6. $2 \wedge -3.0$

Exercice 14

Déterminez à l'aide de votre calculatrice une valeur approchée à 10^{-2} près :

1. e^π
2. $\sqrt[3]{e^2}$
3. $2e^{-2}\sqrt{e}$

2.3 Équations et inéquations

Exercice 15

1. Résolvez dans \mathbb{R} l'équation

$$3t^2 - 2t - 5 = 0$$

2. Résolvez dans \mathbb{R} l'inéquation

$$3t^2 - 2t - 5 < 0$$

3. Déduisez-en une résolution des (in-)équations

1. $3 \ln^2 x - 2 \ln x - 5 = 0$

2. $3 \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 5 < 0$

3. $3 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^x - 5 = 0$

4. $3 \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 5 < 0$

Exercice 16

Résolvez dans \mathbb{R} les (in-)équations :

1. $\ln(x^2) + (\ln(x) - 4) \cdot \ln^2 x = 0$

2. $\ln(x^2) + (\ln(x) - 4) \cdot \ln^2 x \geq 0$

Exercice 17

Déterminez l'ensemble des réels x pour lesquels que la fonction

$$f(x) = \ln(|x| - 2)$$

soit strictement positive.

Exercice 18

Résolvez dans \mathbb{R} :

1. $e^{4x} - 1 = 0$

2. $e^{x^2} - e^4 \leq 0$

3. $e \cdot e^x - \sqrt{e} = 0$

4. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

5. $e^{2x-1} - \frac{1}{e} > 0$

6. $e^{1-2x} > 3$

7. $\frac{1}{e^{1-2x}} > 3$

8. $\frac{(e^x)^2 - 1}{e^{x^2} - e} \geq 0$

Exercice 19

Résolvez dans \mathbb{R} :

1. $0,5^{3x-1} = 1$

2. $3^{2x} - 3^{x-2} = 0$

3. $4^{1-2x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{x}{2}} = 0$

4. $2^{x^2} \leq 2$

5. $0,25^{1-3x} > 4^{2x+3}$

6. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} < \frac{16}{9}$

Exercice 20

Résolvez dans \mathbb{R} (les solutions des équations sont demandées à 10^{-2} près par défaut) :

1. $\ln x = 3$

2. $\ln x + \ln 2 = 1$

3. $\ln(2x - 1) > 0$

4. $\ln(1 - 2x) \geq 1$

5. $\ln \frac{x-1}{x+1} + \ln x < 0$

6. $\ln x - \ln 2 \leq \ln(1 - 3x)$

7. $\ln(4 - x^2) = \ln 2x$

8. $\frac{\ln x + 1}{1 - \ln x} \geq 0$

Exercice 21

Résolvez les (in-)équations logarithmiques suivantes :

1. $2 \log_5(x + 3) - 3 \log_5(2) = 0$

2. $2 \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

3. $\log_4(2x + 1) - \log_4(3 - x) = 0$

4. $\log_{0,4}(1 - x) - 1 = 0$

5. $\log^2 x = 1$

6. $\log_2^2 x - 1 \leq 0$

Exercice 22

Résolvez les (in-)équations logarithmiques suivantes :

1. $\log(x^2 - 4) - \log(2x - x^2) \geq 0$

2. $\log_{0,5}(x^2 - 9) < 1$

3. $\log_2 \frac{x^2 - 3x}{1 - x} - 1 \geq 0$

4. $\log_7(3x - 1) = -2$

5. $\log_2(x^2 - 5x) = \log_2(6)$

6. $\log_{0,2}(2x - 1) \leq 3$

7. $\log^2 x < 9$

Exercice 23

Résolvez dans \mathbb{R} :

1. $\log_{\frac{1}{3}}(4 - x^2) - \log_{\frac{1}{3}} x < \log_3(x)$

2. $\log_2(x - 1) \cdot \log_4(3) = 0$

3. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1 - x^2}{x} < \log_3 x$

4. $\log_2(2^x - 1) + x = \log_4(144)$

2.4 Dérivation

Exercice 24

Déterminez la *dérivée* des fonctions suivantes (définies par leur expression analytique) :

1. $2e^x$

2. e^{2x}

3. e^{x^2}

4. e^{-x}

5. $\frac{1}{e^x}$

6. $\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$

7. $x \cdot e^x$

8. $\frac{x}{e^x}$

9. $\frac{x^2 + 1}{e^x + e^{-x}}$

10. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

11. $e^{\sin(2x)}$

12. $\sin(e^{2x})$

13. $\sqrt{1 - e^{2x}}$

14. $e^{\text{Arcsin } x}$

15. $e^x \cdot \text{Arctan } x$

Exercice 25

Calculez la *dérivée* des fonctions suivantes données par leur expression analytique :

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1. $-\ln^3(x)$ | 2. $\log(3x)$ | 3. $\log_2^3 x$ |
| 4. $\log(x^3)$ | 5. $x \ln(x^2 + 1)$ | 6. $\frac{1}{\log x}$ |
| 7. $\ln(\text{Arcsin } x)$ | 8. $\text{Arcsin}(\ln x)$ | 9. $\frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ |
| 10. $10^x \cdot \log x$ | 11. $\log_{0,2}(\sin x)$ | |

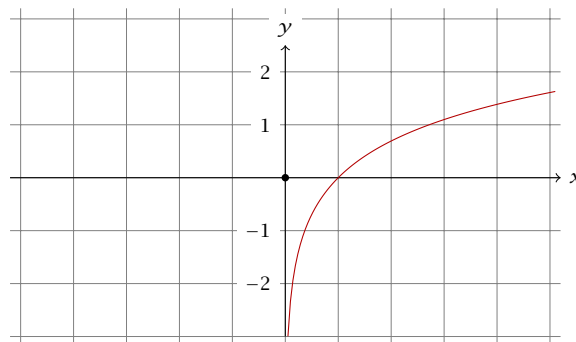
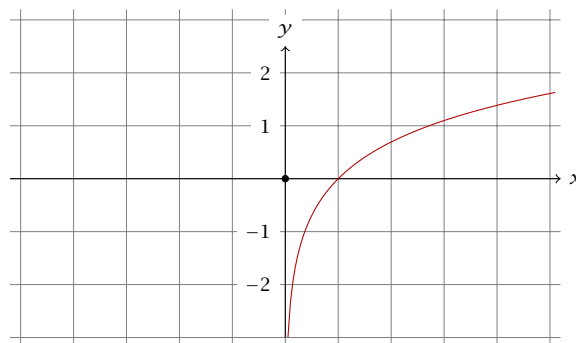
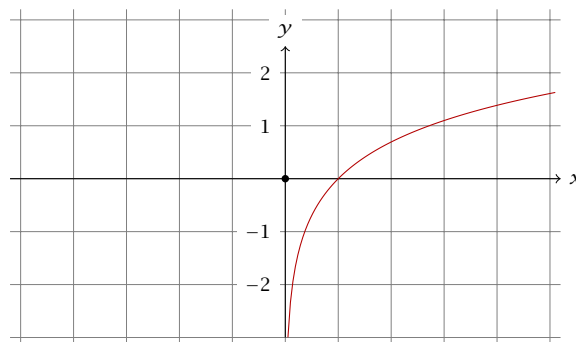
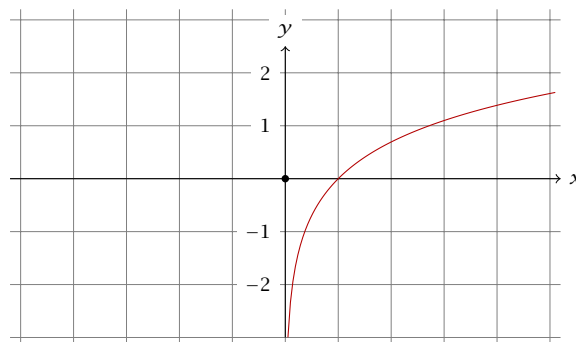
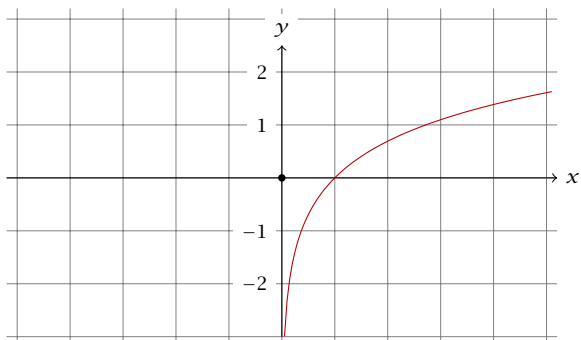
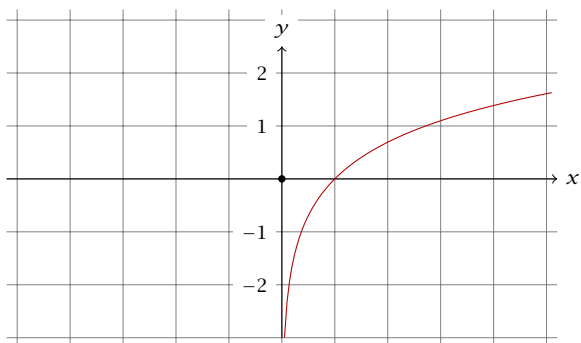
3 Aspects analytiques — Études de fonctions

3.1 Graphiques

Exercice 26

En partant du graphe de la fonction \ln , représentez les fonctions données par les expressions suivantes :

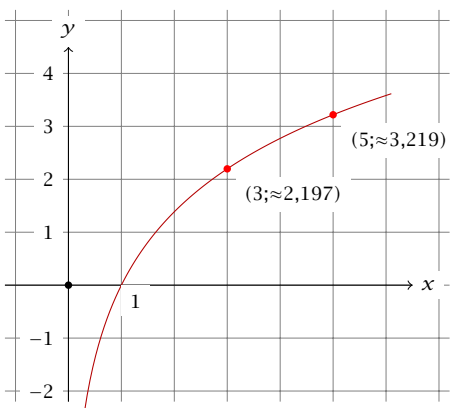
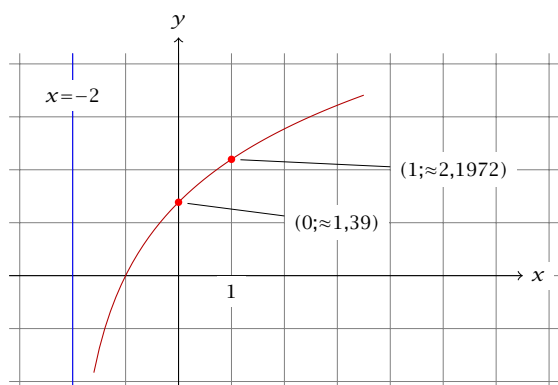
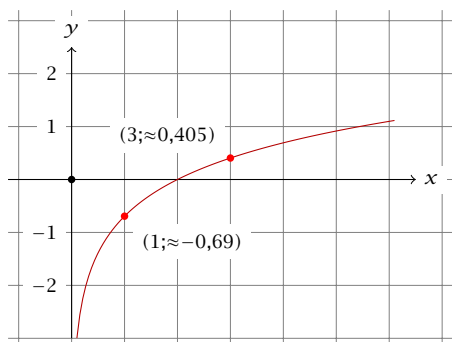
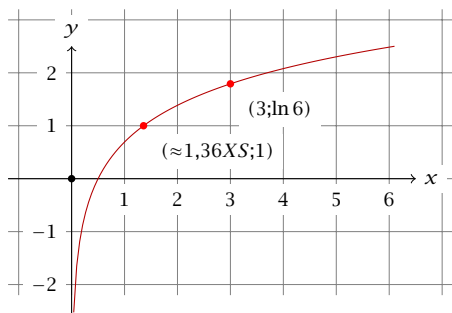
- | | | |
|-----------------|--------------|---------------|
| 1. $\ln(x + 1)$ | 2. $-\ln(x)$ | 3. $\ln(-x)$ |
| 4. $ \ln(x) $ | 5. $\ln x $ | 6. $ \ln x $ |



Exercice 27

À chacune des équations cartésiennes suivantes, associez une des représentations graphiques :

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 1. $y = \ln \frac{x}{2}$ | 2. $y = \ln x - \ln 2$ |
| 3. $y = \ln(2x)$ | 4. $y = 2 \ln(x + 2)$ |
| 5. $y = \ln x + \ln 2$ | 6. $y = 2 \ln x$ |



3.2 Domaines de définition

Exercice 28

Déterminez le *domaine de définition* des fonctions suivantes (définies par leurs expressions analytiques) :

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| 1. $e^{\frac{x-1}{x+2}}$ | 2. $\frac{e^x}{e^{x+1} - 1}$ |
| 3. $2^{\sqrt{x-1}}$ | 4. $3^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$ |
| 5. $\sqrt{5^{x-1} - 125}$ | 6. $\sqrt{0,1^x - 0,01}$ |
| 7. $\frac{2x-3}{3^{2x-1} - 9}$ | 8. $\sqrt{1 - e^{2x}}$ |

Exercice 29

Déterminez le *domaine de définition* des fonctions suivantes (définies par leurs expressions analytiques) :

- | | |
|---|--|
| 1. $\log_7 x$ | 2. $\frac{1}{\log_7 x}$ |
| 3. $\log_{\frac{1}{7}} x$ | 4. $\log_7 \frac{1}{x}$ |
| 5. $\log(1 - 2x)$ | 6. $\log_{0,5} \frac{1-x}{1+x}$ |
| 7. $\log_2(4 - 5x) + \log_2(1 - 2x)$ | 8. $\sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \frac{1-x}{1+x}}$ |
| 9. $\sqrt{\log_2(4x - x^2)}$ | 10. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(4x - x^2)}$ |
| 11. $\log_x(-x^2 - x + 2)$ | 12. $\log_{0,2}(\tan 3x)$ |
| 13. $\log_{\frac{1}{3}}(\text{Arcsin } 3x)$ | 14. $\log_{\frac{1}{5}}(\text{Arccos } 3x)$ |

Exercice 30

Considérons les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \log(x - 1) + \log(x + 4)$$

$$f_2 : x \mapsto \log(x - 1)(x + 4)$$

$$g_1 : x \mapsto \log(x - 1) - \log(x + 4)$$

$$g_2 : x \mapsto \log \frac{x - 1}{x + 4}$$

$$h_1 : x \mapsto \log|x - 1| - \log|x + 4|$$

$$h_2 : x \mapsto \log \left| \frac{x - 1}{x + 4} \right|$$

- Quel est leur *domaine de définition* respectif ?
- Les fonctions f_1 et f_2 sont-elles *égales* ?
Et les fonctions g_1 et g_2 ?
Et les fonctions h_1 et h_2 ?
- Mais à quelle(s) condition(s) peut-on alors écrire
 - $f_1(x) = f_2(x)$
 - $g_1(x) = g_2(x)$
 - $h_1(x) = h_2(x)$

Exercice 31

Comparez le *domaine de définition* des fonctions f et g suivantes :

1. $f(x) = \ln[(3-x) \cdot (2+x)]$

$g(x) = \ln(3-x) + \ln(2+x)$

2. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(4x - x^2)$

$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(4-x) + \log_{\frac{1}{3}}(x)$

3. $f(x) = \log_2 \frac{3-2x}{x+1}$

$g(x) = \log_2(3-2x) - \log_2(x+1)$

3.3 Limites

3.3.1 Série I

Exercice 32

Déterminez les *limites* suivantes en précisant éventuellement s'il s'agit d'une *limite à gauche* ou d'une *limite à droite* :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}}$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

10. $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{x^2-1}}$

11. $\lim_{x \rightarrow -1} 2^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

12. $\lim_{x \rightarrow -1^+} 2^{\frac{1}{x^2-1}}$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

14. $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{x^2-x}}$

Exercice 33

Déterminez les *limites* suivantes en précisant éventuellement s'il s'agit d'une *limite à gauche* ou d'une *limite à droite* :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-\frac{x}{2}}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{-x+1}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,25^{x-1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$

10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x - 1}$

20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} - 2e^x}$

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x - 1}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} - 2e^x}$

Exercice 34

Déterminez les *limites* suivantes en précisant éventuellement s'il s'agit d'une *limite à gauche* ou d'une *limite à droite* :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x)$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2)$

6. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1-x^2)$

7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{3x^2-2}{x^2+1}\right)$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\right)$

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\right)$

Exercice 35

Déterminez les *limites* suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2x}{3}}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{6x}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{6x+1}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x-1}$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$

15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x}$

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x-1}$

17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln 2}{x}\right)^x$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{2-x}$

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-1} \quad 20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{3x-7}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x+1} \quad 22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{2-x}$$

Exercice 36Déterminez les *limites* suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} & 2. \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+2x)^{\frac{1}{x}} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{2}{x}} & 4. \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)^{\frac{1}{x}} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{-\frac{1}{x}} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{-\frac{2}{x}} \\ 7. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x & 8. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^x \\ 9. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^x & 10. \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^x \\ 11. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-x} & 12. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{-x} \end{array}$$

3.3.2 Série II

Exercice 37

Déterminez les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} & 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} \\ 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} & 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} & 6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} \\ 7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2} & 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} \\ 9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(x-1)^2} & 10. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2-1} \\ 11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^4} & 12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{(x^2-1)^2} \\ 13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-1}{e^{\sqrt{x}}} & 14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{x^2} \\ 15. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x & 16. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + x^2 \end{array}$$

Exercice 38

Déterminez les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x & 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} \\ 3. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} & 4. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x) \cdot e^{-2x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot e^x & 6. \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^6 \cdot e^{-x} \end{array}$$

Exercice 39

Déterminez les limites suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x) \cdot e^{-x} \\ 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 1) \cdot e^{2x} \\ 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 3x - 2) \cdot e^{2-x} \\ 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + 3x - 2) \cdot e^{1-2x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot e^{\frac{1}{x-1}} \\ 6. \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3x) \cdot e^{\frac{1}{x-3}} \end{array}$$

Exercice 40

Déterminez les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} & 2. \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot e^{\frac{1}{x-1}} & 4. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot e^{\frac{1}{1-x}} \end{array}$$

Exercice 41

Déterminez les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} & 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x}} \\ 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} & 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^3 x} \\ 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} & 8. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x-e} \end{array}$$

Exercice 42

Déterminez les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x & 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln^2 x \\ 3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x & 4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln x^4 & 6. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln^2 x^3 \\ 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) - x & 8. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) - x^2 \\ 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln^2(x) - x & 10. \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln|x| \\ 11. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + \frac{1}{x} & 12. \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln|x| - \frac{1}{x} \end{array}$$

Exercice 43

Déterminez les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \cdot \ln(x - 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \cdot \ln|x - 1|$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 1)$
4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \cdot \ln|x^2 - 1|$
5. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
6. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \cdot \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

Exercice 44

Déterminez les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{\ln x}{x}}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$