

Exercice 1

1. Étude de la fonction

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$$

- Le domaine de définition de f est \mathbb{R} .
- Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) \cdot e^{-x}$$

est une *forme indéterminée* du type $0 \cdot \infty$ que nous transformons en une forme $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) \cdot e^{-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{e^x} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

Γ_f admet donc l'axe Ox comme *asymptote horizontale*.

Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) \cdot e^{-x} = (-\infty \cdot \infty) = -\infty$$

Déterminons la *direction asymptotique* éventuelle de f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{x + 2}{x}}_{-1} \cdot e^{-x} = +\infty$$

Donc Γ_f admet une *branche parabolique* de direction asymptotique Oy .

- Pour tout réel x

$$f'(x) = -(x + 1) \cdot e^{-x}$$

de sorte que f' s'annule et change de signe en -1 .

Tableau des variations :

x	$-\infty$	-1	∞
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	e	0
	BP de DAs Oy	MAX	AH

- La dérivée seconde de f s'écrit, pour tout réel x :

$$f''(x) = x \cdot e^{-x}$$

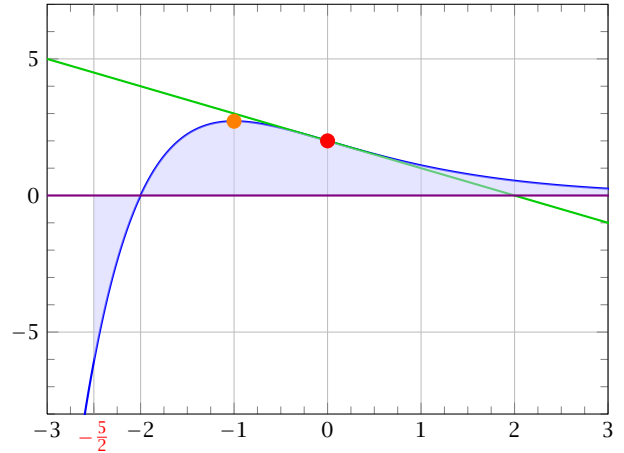
ce qui montre que f'' s'annule et change de signe en $x = 0$: Γ_f admet donc un (seul) *point d'inflexion* : $I(0;2)$, puisque $2 = f(0)$.

- Le point d'intersection avec Oy est le point I . Comme $f(x) = 0 \iff x = -2$, le point d'intersection de Γ_f avec Ox est le point $J(-2;0)$.

- 2. Comme $f'(0) = -1$, l'équation de la tangente au point d'inflexion $I(0;2)$ s'écrit

$$y - 2 = -1 \cdot x \quad \text{c'est-à-dire : } y = -x + 2$$

- 3. Représentation graphique de f dans un repère non orthonormé :



- 4. L'aire *géométrique* est donnée (en fonction du paramètre λ) par l'expression

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda &= - \int_{-\frac{5}{2}}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^\lambda f(x) dx \\ &= 2e^2 - \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} - (\lambda + 3) \cdot e^{-\lambda} \end{aligned}$$

- 5. Faisons tendre λ vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\lambda &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2e^2 - \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} - \underbrace{\frac{\lambda + 3}{e^\lambda}}_{-0} \\ &= 2e^2 - \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Valeur approchée : 8,7 UA.

Exercice 2

- 1. Le domaine de définition (de continuité, de dérivabilité) de f est évidemment \mathbb{R} .

- Comportement asymptotique en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot (2 - x)^2 = (\infty \cdot \infty) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \underbrace{\frac{(x - 2)^2}{x}}_{-\infty} = \infty$$

de sorte que Γ_f admet une *branche parabolique* de direction asymptotique Oy .

- Comportement asymptotique en $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{e^x}_{-0} \cdot \underbrace{(2 - x)^2}_{-\infty} &\stackrel{\text{CHV}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot (2 + x)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 2)^2}{e^x} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} 0 \end{aligned}$$

de sorte que Γ_f admet l'axe Ox comme *asymptote horizontale*.

2. La dérivée de f s'écrit, pour tout réel x :

$$f'(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$$

D'où le *tableau de variation* :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+		
$f(x)$		0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$
		AH		MAX		MIN		BP de DAs Oy

3. La dérivée seconde de f s'écrit, pour tout x réel :

$$f''(x) = (x^2 - 2) \cdot e^x$$

D'où le *tableau synoptique* résumant les *propriétés de courbure* de Γ :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		U		∩		U

Ce tableau permet de conclure que Γ_f admet deux *points d'inflexion* :

$$P(-\sqrt{2}; f(-\sqrt{2})) \approx P'(-1,4; 2,8)$$

$$Q(\sqrt{2}; f(\sqrt{2})) \approx Q'(1,4; 1,4)$$

4. L'équation de la *tangente* \mathcal{T} par le point de Γ d'abscisse 1 s'écrit

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

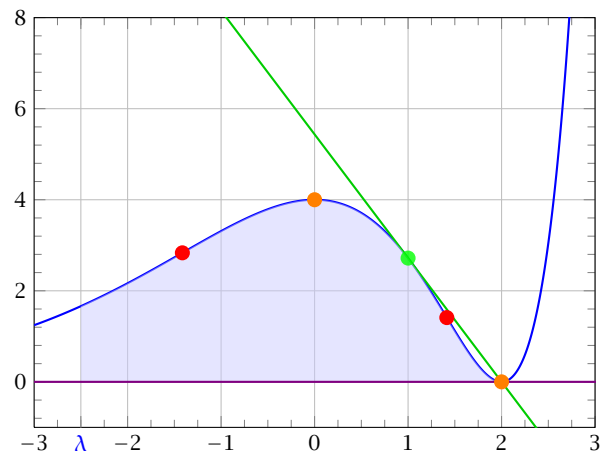
avec

$$f(1) = e \quad f'(1) = -e$$

D'où finalement l'équation explicite de \mathcal{T}

$$y = -ex + 2e$$

5. Voici la *représentation graphique* de f dans un repère non orthonormé :



6. Expression analytique de l'aire comme fonction du paramètre λ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda &= \int_\lambda^2 e^x (2-x)^2 dx \\ &= 2e^2 - e^\lambda \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 10) \end{aligned}$$

7. Faisons tendre λ vers $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_\lambda &= 2e^2 - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^\lambda \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 10) \\ &\stackrel{\text{CHV}}{=} 2e^2 - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 6t + 10}{e^t} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} 2e^2 \\ &\approx 14,8 \text{ UA} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Le domaine de définition (ainsi que celui de continuité, de différentiabilité) de f est évidemment \mathbb{R} .

• Comportement asymptotique de f au voisinage de $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (\infty \cdot \infty) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{2x^2 - x - 1}{x}}_{-\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{-\infty} = -\infty$$

ce qui montre que Γ_f admet une *branche parabolique* de direction asymptotique Oy .

• Comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{e^x} \\ &\stackrel{\text{H}}{=} 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que Γ_f admet au voisinage de $+\infty$ la droite Ox comme *asymptote horizontale*.

2. La dérivée de f s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (-2x^2 + 5x) \cdot e^{-x} = -(2x - 5)x e^{-x}$$

Le tableau de variation de f s'écrit donc :

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	∞			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		$9e^{-\frac{5}{2}}$		0
	BP de DAs Oy	MIN	MAX	AH			

3. La fonction f' est dérivable sur tout \mathbb{R} et sa dérivée s'écrit, pour tout x :

$$f''(x) = (2x^2 - 9x + 5)e^{-x}$$

Les zéros de f'' sont

$$a = \frac{9 - \sqrt{41}}{4} \quad b = \frac{9 + \sqrt{41}}{4}$$

D'où le tableau synoptique des propriétés de courbure :

x	$-\infty$	a	b	∞	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	\cup		\cap		\cup

qui permet de conclure que Γ_f admet deux points d'inflexion :

$$A(a; f(a)) \approx A'(0,65; -0,4)$$

$$B(b; f(b)) \approx B'(3,9; 0,5)$$

4. L'équation de la tangente \mathcal{T} par le point de Γ d'abscisse 1 s'écrit

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

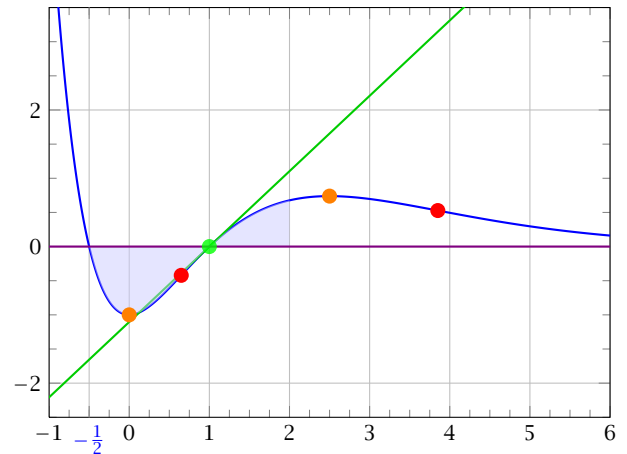
avec

$$f(1) = 0 \quad f'(1) = \frac{3}{e}$$

D'où finalement l'équation explicite de \mathcal{T}

$$y = \frac{3}{e}x - \frac{3}{e}$$

5. Voici la représentation graphique de f dans un repère non orthonormé :



6. Équation aux abscisses des points d'intersection de Γ_f avec Ox :

$$f(x) = 0 \iff 2x^2 - x - 1 = 0 \iff x \in \{-\frac{1}{2}; 1\}$$

L'aire géométrique de la partie S est alors :

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -\frac{16}{e^2} + \frac{14}{e} - \sqrt{e} \approx 1,336 \text{ UA} \approx 5,3 \text{ cm}^2$$

Exercice 4

- Le domaine de définition (de continuité, de dérivabilité) de f est \mathbb{R} .
- Étudions le comportement de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 3x - 2}{e^{x-2}} \stackrel{H}{=} 0$$

ce qui signifie que Γ_f admet Ox comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. Étudions le comportement de f en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty \cdot \infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{-2x^2 + 3x - 2}{x}}_{-\infty} \cdot e^{2-x} = +\infty$$

d'où l'on déduit que Γ_f admet une branche parabolique dans la direction de Oy .

- La fonction f , dérivable sur tout \mathbb{R} admet comme dérivée la fonction

$$f'(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^{2-x}$$

dont les zéros sont $\frac{5}{2}$ et 1.

4. Le volume est défini par l'expression

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t) &= \int_t^0 \pi f(x)^2 dx \\ &= \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi e^2}{4} \cdot (2t^2 - 2t + 1) e^{2t} \end{aligned}$$

5. Limite du volume si $t \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(t) &= \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi e^2}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} (2t^2 - 2t + 1) e^{2t} \\ &= \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi e^2}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{2t^2 + 2t + 1}{e^{2t}}}_{-0} \\ &= \frac{\pi e^2}{4} \approx 5,803 \text{ UV} \end{aligned}$$

Exercice 6

1. Remarquons que $f(4) \neq 0$, ce qui signifie que $A \notin \Gamma_f$.

L'équation d'une tangente \mathcal{T} à Γ_f s'écrit

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t) \cdot (x - t) \\ y + 3te^{2-t} &= 3(t-1)e^{2-t} \cdot (x - t) \end{aligned}$$

où t est l'abscisse d'un point de contact.

Le point A appartient à \mathcal{T} si et seulement si

$$3te^{2-t} = 3(t-1)e^{2-t} \cdot (4-t)$$

équation en t qui s'écrit, après simplification

$$(t-2)^2 = 0$$

Il n'y a donc qu'un seul point de contact, $T(2; f(2) = -6)$, et partant qu'une seule tangente

$$y + 6 = 3 \cdot (x - 2) \iff y = 3x - 12$$

2. Comme $f(x) < 0$ pour tout $x \in [4; \lambda]$ où $\lambda > 4$, l'aire est donnée par

$$\mathcal{A}_\lambda = - \int_4^\lambda f(x) dx = -3 \cdot (\lambda + 1)e^{2-\lambda} + 15e^{-2}$$

3. Faisons tendre maintenant λ vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda &= 15e^{-2} - 3e^2 \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\lambda + 1}{e^\lambda}}_{-0} \\ &= 15e^{-2} \approx 2,03 \text{ UA} \end{aligned}$$

4. Comme 0 est l'unique zéro de f , le volume du corps de révolution est donné par :

$$\int_0^2 \pi \cdot f(x)^2 dx = \frac{9}{4} \pi \cdot (e^4 - 13) \approx 294,04 \text{ UV}$$

Exercice 7

- 1. • Le domaine de définition de f est \mathbb{R}_+^* .
- Comportement de f en $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty + 0 = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{-0} + \underbrace{\frac{e}{x^2}}_{-0} = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que Γ_f admet une *branche parabolique* dans la direction de Ox .

Comportement de f en 0^+

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (\underbrace{x \ln x}_{-0} + e) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ce qui montre que Γ_f admet une *asymptote verticale* en 0^+ .

- f est (évidemment) dérivable sur \mathbb{R}_0^+ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{x - e}{x^2}$$

f' s'annule et change de signe en $x = e$.

- f'' est (évidemment) dérivable sur \mathbb{R}_0^+ et pour tout $x > 0$:

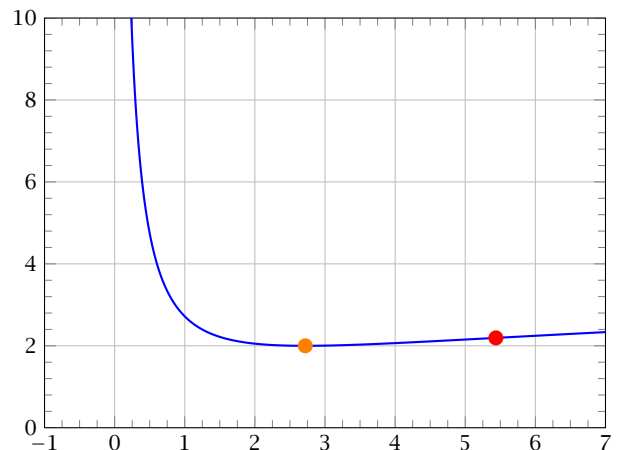
$$f''(x) = \frac{-x + 2e}{x^3}$$

f'' s'annule et change de signe en $x = 2e$.

- **Tableau des variations :**

x	0^+	e	$2e$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +		+
$f''(x)$		+ 0 -		
$f(x)$	∞	\searrow	\swarrow	\nearrow $+\infty$
	AV	MIN	PIF	BP de DAs Ox

- Représentation graphique de f :



2. L'aire de S est donnée par l'expression

$$\int_1^e f(x) dx = e + 1 \approx 3,7 \text{ UA}$$

3. Le volume peut-être calculé à l'aide de l'expression

$$\int_1^e \pi f(x)^2 dx = (e^2 + e - 2) \pi \approx 25,5 \text{ UV}$$

Exercice 8

- 1. • Le domaine de définition et de continuité de f est $]0; +\infty)$.
- Comportement de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 2 \cdot \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{-0} = 0$$

ce qui montre que Γ_f admet l'axe Ox comme *asymptote horizontale* en $+\infty$.

Comportement de f en 0^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

de sorte que Γ_f admet Oy comme *asymptote verticale*.

- f est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^2}$$

Tableau des variations :

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$-\infty$	0
	AV	MAX	AH

- f' est dérivable sur $]0; +\infty)$, et

$$\forall x > 0 : f''(x) = 4 \frac{\ln x - 1}{x^3}$$

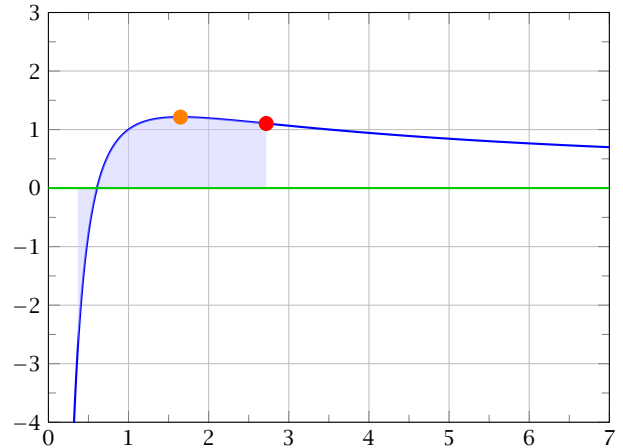
f'' s'annule et change de signe en $x = e$:

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$		-	0
$f(x)$		\cap	$\frac{3}{e}$
		PIF	U

- Intersection avec Ox :

$$f(x) = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

- Graphe cartésien (dans un repère non ortho-normé)



2. L'aire est donnée par

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\frac{1}{e}} -f(x) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e f(x) dx = \frac{5}{2}$$

- 3. Le domaine de g est \mathbb{R}^* ; la fonction g est *impaire*, puisque, pour chaque réel $x \neq 0$:

$$g(-x) = \frac{1 + \ln(x^2)}{-x} = -g(x)$$

On constate que g est un *prolongement* de f puisque

$$\forall x > 0 : \ln(x^2) = 2 \ln x$$

Ainsi Γ_g est la réunion de Γ_f et de l'image de Γ_f dans la symétrie centrale de centre O .

Exercice 9

- 1. • Le domaine de f est $\mathbb{R} - \{-1\}$.
- Au voisinage de $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\ln(1+x)^2}{x}}_{-0} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \underbrace{\frac{\ln(1+x)^2}{x}}_{-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x)^2 = \infty$$

Γ_f admet donc au voisinage de $-\infty$ une *branche parabolique* dans la direction de la droite $y = x$.

Au voisinage de -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

ce qui montre que Γ_f admet la droite d'équation $x = -1$ comme *asymptote verticale*.

Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + 2 \cdot \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{-0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x)^2 = \infty$$

Γ_f admet donc au voisinage de $+\infty$ une *branche parabolique* dans la direction de la droite $y = x$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, de dérivée

$$f'(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

Tableau des variations

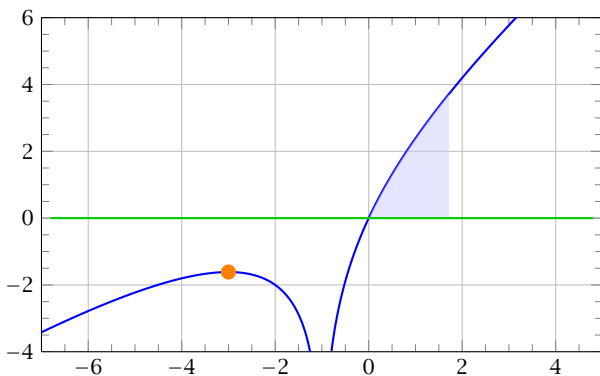
x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$-3 + \ln 4$	\searrow	$-\infty$	\nearrow	∞
	BP		MAX		AV		BP

- f' est évidemment dérivable sur le domaine de f et l'on a :

$$f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0$$

ce qui montre que f est une fonction *concave*.

2. Représentation graphique :



3. L'aire peut être exprimée par

$$\int_0^{e-1} f(x) dx = \frac{e^2 - 2e + 5}{2}$$

Exercice 10

1. Étude de la fonction f

- Le domaine de définition de f est $]1; +\infty)$.
- Comportement asymptotique de f au voisinage de 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

ce qui permet de conclure que Γ_f admet la droite d'équation $x = 1$ comme *asymptote verticale*.

Comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \underbrace{\frac{\ln(x-1)}{x^2}}_{-0} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 - 2 \cdot \underbrace{\frac{\ln(x-1)}{x^2}}_{-0} \right) = +\infty$$

d'où l'on conclut que Γ_f admet une *branche parabolique* dans la direction de Oy .

- f est deux fois dérivable sur $]1; +\infty)$:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x-1} = 2 \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x-1}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

La fonction f est donc *convexe* et n'admet aucun point d'inflexion.

f' s'annule et change de signe pour

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

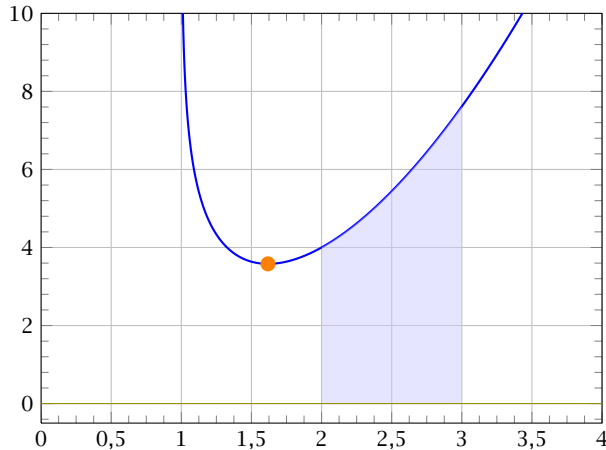
- Tableau des variations

x	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	m	\nearrow	$+\infty$
	AV		MIN		BP

avec

$$m = -2 \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}+3}{2} \approx 3,58$$

• Représentation graphique



2. L'aire est donnée par

$$\int_2^3 f(x) dx = \frac{25}{3} - 4 \ln 2 \approx 5,6$$

Exercice 11

1. Le domaine de définition (et de continuité) de f est $]0; +\infty[$.

Comportement de f au voisinage de 0^+ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{-\infty}{0^+} \right) = -\infty \end{aligned}$$

de sorte que Γ_f admet Oy comme asymptote verticale.

Comportement de f au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{-0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que Γ_f admet l'axe Ox comme asymptote horizontale.

2. f est évidemment dérivable sur son domaine de définition :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

de sorte que f' s'annule et change de signe en $x = e$. D'où le tableau des variations :

x	0^+	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	0
	AV	MAX	AH

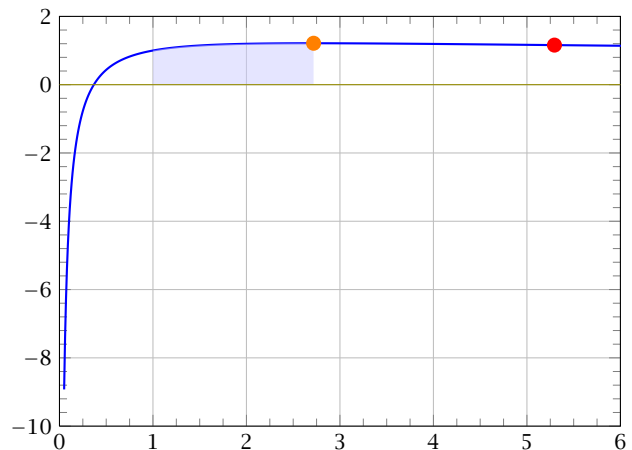
3. On a

$$f(e^{-1}) = 0 \quad f'(e^{-1}) = e\sqrt{e}$$

de sorte que l'équation de la tangente s'écrit

$$\begin{aligned} y &= f'(e^{-1}) \cdot (x - e^{-1}) + f(e^{-1}) \\ y &= e\sqrt{e}x - \sqrt{e} \end{aligned}$$

4. Représentation graphique de f (dans un repère non orthonormé)



5. L'aire de la partie S est donnée par :

$$\int_1^e f(x) dx = 2$$

6. Le volume du solide de révolution est donné par l'expression

$$\int_1^e \pi f(x)^2 dx = \frac{7\pi}{3}$$

Exercice 12

1. • Le domaine de définition (et de continuité) de la fonction f est $] -2; 2[$.

Remarquons que f est *paire*.
Comportement asymptotique

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

ce qui montre que Γ_f admet les droites d'équations resp. $x = -2$ et $x = 2$ comme asymptotes verticales.

- Le domaine de g est tout \mathbb{R} et g aussi est une fonction *paire*.

Comportement asymptotique

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} \hat{=} 0 \hat{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$$

on en déduit que Γ_g admet une *branche parabolique* dans la direction de Ox .

- La fonction f est deux fois dérivable sur son domaine de définition et, pour $x \in]-2; 2[$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} < 0$$

La fonction f est donc *concave*. Voici son *tableau des variations* :

x	-2^+	0	2^-
$f'(x)$		$+$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 4$	$-\infty$
	AV	MAX	AV

La fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout x

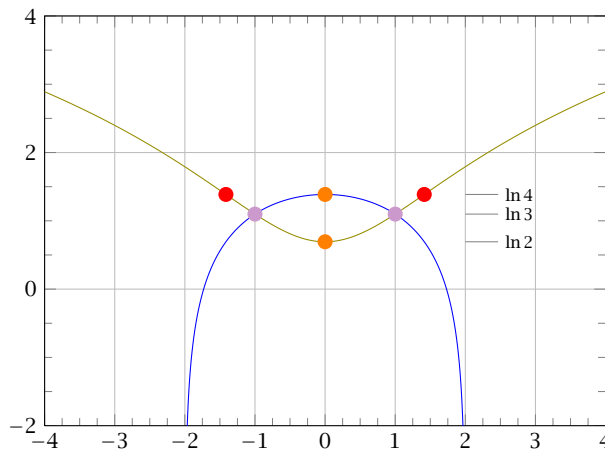
$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$$

$$g''(x) = -2 \cdot \frac{x^2 - 2}{(x^2 + 2)^2}$$

Voici son *tableau de variation* :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$+$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 4$	$\ln 2$	$\ln 4$	$+\infty$
	BP de DAs Ox	PIF	MIN	PIF	BP de DAs Ox

3. Représentation graphique



Équation aux abscisses des points d'intersection

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(4 - x^2) = \ln(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow 4 - x^2 = x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-1; +1\}$$

D'où les deux *points d'intersection*

$$I(-1; \ln 3) \quad J(+1; \ln 3)$$

- L'*aire* est donnée par

$$\int_{-1}^{+1} f(x) - g(x) dx = 4 \ln 3 - 2^{\frac{5}{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,9$$