Nombres Complexes II

Question 1

Soit le polynôme

$$P(z) = 3z^3 + (1+5i)z^2 + \left(i - \tfrac{5}{2}\right) z - \tfrac{1}{2} i$$

1. Calculez les racines *carrées* complexes de $3 + 4i$ sous forme *algébrique*.
2. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, après avoir vérifié que $-i$ est une solution.

Question 2

Soient

$$z_1 = -\sqrt{3} - i, \qquad z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

calculez

$$z_1^7 \cdot z_2^2$$

et écrivez le résultat sous forme *trigonométrique*.

Question 3

Soient

$$z_1 = \frac{3+7i}{2-5i}. \quad z_2 = -\tfrac{1}{8} \cdot (\sqrt{3} - i)$$

Écrivez

$$Z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

sous forme *trigonométrique* et sous forme *algébrique*.

Question 4

Soient

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot i}{2}, \qquad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$$

Écrivez

$$Z = z_1^{13} \cdot z_2^7$$

sous forme *trigonométrique* et sous forme *algébrique*.

Question 5

Soit

$$Z = \frac{6 \cdot (\sqrt{3} - i) - 4 \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i)}{2 + 3i}$$

1. Écrivez Z sous forme *algébrique*.
2. Écrivez Z sous forme *trigonométrique*.
3. Calculez les *racines quatrièmes* de Z (en utilisant la forme trigonométrique de Z).

Question 6

Soit le nombre complexe $A = -\sqrt{48} - 4i$.

1. Mettez A sous forme *trigonométrique*.
2. Calculez les *racines cubiques* complexes de A.
3. Trouvez un entier n tel que $A^n \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que A^n soit un nombre *réel*.
   Indication : Calculez la partie imaginaire de A^2, A^3, A^4 … à l'aide de la forme trigonométrique de A.
4. Trouvez un entier p tel que $A^p \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que A^p soit un *imaginaire pur*.