1 Systèmes dépendant d'un paramètre

Question 1

1. Déterminez les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le système suivant admet une seule solution :

$$\begin{cases} (m-4)x + 3y - z = 10 \\ 2x - 4y + 3z = -19 \\ 3x - 3y + 6z = -27 \end{cases}$$

2. Résolvez et interprétez géométriquement le système ci-dessus lorsque $m = 3$.

Question 2

Soit le système suivant de paramètre m :

$$\begin{cases} -6x + 3y - 9z = 5 \\ mx - 5y + 15z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m ce système admet-il une solution unique ?
2. Est-il possible de choisir m pour que les trois équations du système représentent trois plans parallèles de l'espace ? Justifiez votre réponse !

Question 3

1. Déterminez les valeurs du paramètre m pour lesquelles le système suivant admet une solution unique :

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ mx - y + 2z = 5 \\ 7x - 2y + 3z = 15 \end{cases}$$

2. Résolvez et interprétez géométriquement le système lorsque $m = 2$.

Question 4

Combien de solutions le système suivant admet-il suivant les valeurs du paramètre réel m ?

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ 4x + 6y - 2z = 0 \\ mx + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Question 5

Résolvez, discutez et interprétez géométriquement dans l'espace le système

$$\begin{cases} (m+2)x + 2y + 3z = -3 \\ -2x + (m-2)y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

Question 6

1. Déterminez les valeurs du paramètre m pour lesquelles le système suivant admet une seule solution :

$$\begin{cases} mx + 4y + 2z = 6 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

2. Résolvez et interprétez géométriquement le système ci-dessus lorsque $m = 2$.

Question 7

Soit le système

$$\begin{cases} ax - y + z = -2 \\ 2x + y + 3z = -3a \\ ax + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Montrez que le système est cramérien si et seulement si $a \neq \frac{2}{3}$.
2. Résolvez, discutez et interprétez géométriquement le système suivant la valeur du paramètre a.

Question 8

Résolvez le système suivant en discutant suivant les valeurs du paramètre m et interprétez géométriquement :

$$\begin{cases} mx + 6y + 3z = 3 \\ x + (m-1)y = m+1 \\ x + 2my + z = m \end{cases}$$

2 Géométrie Analytique

Question 9

Soient les trois points $A(-1;2;1)$, $B(2;-1;3)$ et $C(0;-2;-1)$ donnés dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Déterminez des équations paramétriques et une équation cartésienne du plan Π contenant les trois points A, B et C.
2. Est-ce que le point $D(-5;3;1)$ appartient au plan Π ?
3. Déterminez les coordonnées du point de percée de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

avec le plan Π.

Question 10

Soient les points $A(0;-1;1)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;-1;0)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}(1;1;-1)$ dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Déterminez une équation cartésienne du plan Π passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
2. Vérifiez si les points B et C appartiennent au plan Π.
3. Écrivez les équations paramétriques de la droite d passant par le point C et orthogonale au plan Π.
4. Déterminez l'intersection de la droite d et du plan Π.
5. Établissez une équation cartésienne du plan Π' orthogonal au plan Π et contenant la droite d et le point B.

Question 11

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $M(2;0;-1)$ et la droite d définie par le système d'équations cartésiennes

$$d \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - z = 6 \end{cases}$$

1. Caractérisez la droite d par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.
2. Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite d.
3. Déterminez une équation cartésienne du plan Π perpendiculaire à d et passant par M.
4. Déterminez l'intersection $d \cap \Pi$.

Question 12

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le plan

$$\Pi \equiv 2x - y + 3z = 4$$

et la droite d comprenant les deux points $A(1;2;3)$ et $B(3;-2;1)$.

1. Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite d.
2. Montrez que la droite d est sécante avec le plan Π et calculez les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Le point $C(1;-2;0)$ appartient-il à la droite d ? Au plan Π ? Justifiez.
4. Dterminez une équation cartésienne du plan CIA.

3 Nombres complexes

Question 13

Déterminez les racines cubiques de 8 dans $\mathbb{C}$.
Déduisez-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(z^2 + 2z)^3 = 8$$

Question 14

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$P(z) = z^3 - 2i \cdot z^2 + (3+4i) \cdot z + 8 - 6i = 0$$
sachant que P admet une racine imaginaire pure.
2. On considère les nombres complexes suivants :
$$z_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3} + 6i)^2}{(\sqrt{3} + 3i)^3} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) i}{\sqrt{3} + i}$$
   (a) Écrivez z_1 et z_2 sous forme algébrique et puis sous forme trigonométrique.
   (b) Écrivez $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$ sous forme algébrique et trigonométrique.
   (c) Déduisez des calculs précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Question 15

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = 0$$

sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Question 16

On donne les nombres complexes

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_2 = \frac{7i - 1}{4 + 3i} - \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$$

1. Mettez z_1 et z_2 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. En calculant de deux façons différentes $z = \frac{z_1}{z_2}$ déterminez $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Question 17

Soit le nombre complexe

$$Z = \frac{(\sqrt{3} - i)^7}{16 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}}$$

1. Écrivez Z sous sa forme trigonométrique, puis sous sa forme algébrique.
2. Calculez les racines cubiques complexes z_0, z_1 et z_2 de Z (sous forme algébrique, puis trigonométrique).
3. Reportez les points qui ont pour affixes les racines cubiques de Z dans le plan de Gauss.
4. Calculez $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2$ sous sa forme algébrique et $z_0^2 \cdot z_1^2 \cdot z_3^2$ sous sa forme trigonométrique.