

1 Logarithmes et exponentielles

1.1 Transformations

Exercice 1

1. Calculez : $3 \log_5(\sqrt[3]{2}) \cdot \log_2 5$.
2. Calculez : $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdots \log_{31} 32$
3. Posons

$$\log_8 3 = p, \quad \log_3 5 = q.$$

Exprimez à l'aide de p et q le nombre $\log_{10} 5$.

Exercice 2

Simplifiez l'expression

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x}$$

où x est un réel strictement positif.

Exercice 3

Considérons $a > 1, b > 1$.

Calculez a^p sachant que $p = \frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}$.

Exercice 4

Déterminez le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \ln \frac{x-2}{x-1}$$

Exercice 5

Simplifiez l'expression $\ln(e^{2x}) - e^{-\ln(x)}$.

Exercice 6

Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\ln(a+b) = \ln(a) \cdot \ln(b)$
2. $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$
3. $\ln\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \ln(a+b) - \ln(ab)$
4. $\exp\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \exp(a+b) - \exp(ab)$

Exercice 7

Soit $f(x) = \ln(x^2) + \sin(x)$ et $g(x) = e^{2x}$.
Explicitez $f[g(x)]$ et $g[f(x)]$.

1.2 Aspects analytiques

Exercice 8

Calculez les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1}$
2. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)(\ln x)$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(x^2 + 1)$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x - \ln x$
9. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 - 1}$
10. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{e^{2x^2}}{x^4 + 1}$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 1)e^x$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1)e^{2x^2}$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - e^x$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - e^{-2x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$
16. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 9

Déterminez le (petit) tableau des variations et une représentation graphique des fonctions f définies par les expressions analytiques suivantes :

1. $\frac{\ln x}{x}$
2. $x \ln |x|$
3. $|\ln x|$
4. $\ln |x|$
5. $x - \ln x$
6. $x^2 - 2 \ln x$
7. $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right|$
8. $\ln |x \cdot (x-2)|$
9. $\frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$
10. $\frac{1}{\ln |x+1|}$
11. $\frac{e^x}{x}$
12. $x e^x$
13. $e^{\frac{1}{x}}$
14. $x^2 e^x$
15. $\frac{e^x}{x^2 + 1}$
16. $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

2 Probabilités

Exercice 10

Un dé est lancé n fois.

1. Calculez la probabilité de l'événement : obtenir au moins un six en n lancers.
2. Combien de fois faut-il lancer le dé afin que cette probabilité soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

Exercice 11

Calculer le coefficient du terme en x^9 provenant du développement de

$$\left(2x^2 - \frac{1}{8x}\right)^{12}$$

Exercice 12

Une plaque d'immatriculation d'une voiture est formée de 2 lettres suivies de 3 chiffres.

1. Combien de plaques peut-on former ?
2. Combien de plaques peut-on former si les 2 lettres sont différentes ?
3. Combien de plaques peut-on former si les 3 chiffres sont différents ?
4. Combien de plaques peut-on former si les 2 lettres et les 3 chiffres sont différents et si le premier des 3 chiffres est non nul ?

Exercice 13

Parmi les 50 passagers d'un avion se trouvent 6 malfaiteurs. Un douanier fait un contrôle à bord de l'avion. Il choisit au hasard 7 passagers. Calculez la probabilité de l'événement : « Parmi les 7 personnes contrôlées se trouvent exactement 3 malfaiteurs. ».

Exercice 14

On distribue les cartes d'un paquet de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité que la dixième carte distribuée soit un as ?
2. Quelle est la probabilité que le premier as survenue à la dixième place ?

Exercice 15

Un étudiant doit répondre à 12 questions parmi 16.

1. De combien de manières peut-il le faire ?
2. Même question, s'il doit répondre à exactement 1 des 3 premières questions ?
3. Même question, s'il doit répondre à exactement 4 des 6 premières questions ?

Exercice 16

1. Combien de mots de 3 consonnes différentes et de 2 voyelles différentes peut-on former avec 21 consonnes et 5 voyelles ? (Les mots ont un sens ou non.)
2. On jette 5 fois un dé non truqué. On gagne si on obtient 1 ou 6.
 - (a) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne 1 ou 6 exactement 3 fois.
 - (b) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne 1 ou 6 au moins 1 fois.

3. On jette deux fois un dé non truqué.

Calculer la probabilité de l'événement « la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 7 ».

Exercice 17

1. Combien y a-t-il de tiercés différents possibles pour une course de 12 chevaux ? Combien y a-t-il de classements différents pour une telle course ?
2. Le comité d'un club de tennis est composé de 7 personnes. On doit élire un président, un secrétaire et un trésorier. De combien de manières différentes peut-on les choisir ?
3. Une association est dirigée par un triumvirat qui est élu parmi un groupe de 7 personnes. De combien de manières peut-il être constitué ?
4. Les USA organisent des sélections (des trials) de 3 athlètes qui les représenteront aux JO lors chaque épreuve d'athlétisme. Parmi les huit finalistes de cette épreuve, de combien de manières peut-on sélectionner 3 athlètes ?
5. Dans un peloton de 20 soldats, de combien de manières peut-on choisir 6 hommes pour une corvée ? De combien de manières peut-on former un groupe de 6 soldats si Fabien en fait partie ?
6. A l'aide des chiffres de 1 à 9, on constitue des nombres de 4 chiffres différents.
 - (a) Combien de nombres peut-on former contenant 4 chiffres ?
 - (b) Combien y a-t-il de multiples de 5 parmi ces nombres ?
 - (c) Combien parmi les nombres de 4 chiffres différents ne contiennent pas 7 ?
7. Dans un club de 11 joueurs de handball, combien d'équipes de 7 joueurs peut-on former (pas de rôle précis pour les joueurs) ? Même question si la place du gardien est réservée au spécialiste.
8. Dans un lot de 20 pièces, on en prélève 4. De combien de manières peut-on effectuer ce prélèvement ?
9. A l'aide de 5 fanions de teintes différentes, on réalise des signaux en posant 3 d'entre eux sur une hampe.
 - (a) Combien de signaux distincts peut-on former avec des fanions différents ?
 - (b) Combien de signaux différents peut-on former si le nombre de drapeaux placés sur la hampe n'a pas d'importance ?