

1 Discours de la méthode

Nous ne disposons d'un *algorithme* de résolution que dans le cas des équations de degré 2.

La résolution de $az^2 + bz + c = 0$ s'effectue suivant les étapes :

- calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- calcul d'une racine carrée *complexe* δ de Δ
Une version « rapide » d'un tel calcul est expliquée dans la section 5.
- évaluation de l'expression $\frac{-b \pm \delta}{2a}$.

Cette dernière étape est souvent oubliée, malheureusement.

2 Équation de degré 4

2.1 Méthode

La résolution d'une équation de degré 4 peut être subdivisée en deux parties :

- *La réduction au second degré*
Nous devons disposer d'une information sur *deux* des racines du polynôme ; on réduit, à l'aide de deux *factorisations* successives (réalisées à l'aide du schéma de Horner), le problème à la résolution d'une équation auxiliaire de degré 2.
- *Résolution d'une équation de degré 2*
On appliquera la méthode classique.

2.2 L' exercice

Réponse 1

1. La réduction au second degré

Information sur les racines : f admet les zéros $1 + i$ et $1 - i$.

Utilisons le *schéma de Horner* pour $z = 1 + i$ et $z = 1 - i$ avec la disposition suivante :

	2	-5	3	4	-6	
$z=1+i$		2 + 2i	-5 - i	-1 - 3i	6	
	2	-3 + 2i	-2 - i	3 - 3i	0	
$z=1-i$		2 - 2i	-1 + i	-3 + 3i		
	2	-1	-3	0		

Nous obtenons ainsi la *factorisation*

$$P(z) = (2z^2 - z - 3) \cdot (z - 1 + i) \cdot (z - 1 - i)$$

2. Résolution d'une équation de degré 2

Comme $\Delta = 25$, les zéros de $2z^2 - z - 3$ sont les réels -1 et $\frac{3}{2}$.

Synthèse

L'équation $P(z) = 0$ admet donc les solutions

$$-1, \quad \frac{3}{2}, \quad 1 + i, \quad 1 - i$$

La *factorisation* de $P(z)$ en binômes du premier degré s'écrit

$$P(z) = 2 \cdot (z + 1) \left(z - \frac{3}{2}\right) (z - 1 + i)(z - 1 - i)$$

N'oubliez pas le coefficient dominant !

3 Équations de degré 3

3.1 Méthode

La résolution d'une équation de degré 3 peut être subdivisée en deux parties :

- *La réduction au second degré*
Nous devons disposer d'une information sur *une* des racines du polynôme ; on réduit, à l'aide d'une *factorisation* (réalisée à l'aide du schéma de Horner), le problème à la résolution d'une équation auxiliaire de degré 2 ;
- *Résolution d'une équation de degré 2*
suivant la méthode classique.

3.2 Les exercices

Réponse 2

1. La réduction au second degré

Information sur une des racines : f admet une seule racine *réelle*, notée a .

La relation $f(a) = 0$ se traduit par

$$(a^3 + 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a - 16) + (-4 \cdot a^2 - 14 \cdot a + 8) \cdot i = 0$$

c'est-à-dire par le système :

$$a^3 + 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a - 16 = 0 \quad (1)$$

$$-4 \cdot a^2 - 14 \cdot a + 8 = 0 \quad (2)$$

Remarquez que la relation (2) est une équation du second degré ; la racine $a = -4$ de (2) vérifie aussi (1).

D'où un premier zéro de $f(z)$, à savoir $z_1 = -4$.

Le *schéma de Horner* permet d'obtenir la *factorisation* :

$$f(z) = (z^2 - 4i \cdot z - 4 + 2i) \cdot (z + 4)$$

2. Résolution d'une équation de degré 2

Déterminons donc les zéros de $z^2 - 4i \cdot z - 4 + 2i$.

- Le discriminant :

$$\Delta = (4i)^2 - 4 \cdot (-4 + 2i)$$

$$= -8 \cdot i$$

$$= 4 \cdot (-2i)$$

$$= 4 \cdot (1 - i)^2$$

$$= (2 - 2 \cdot i)^2$$

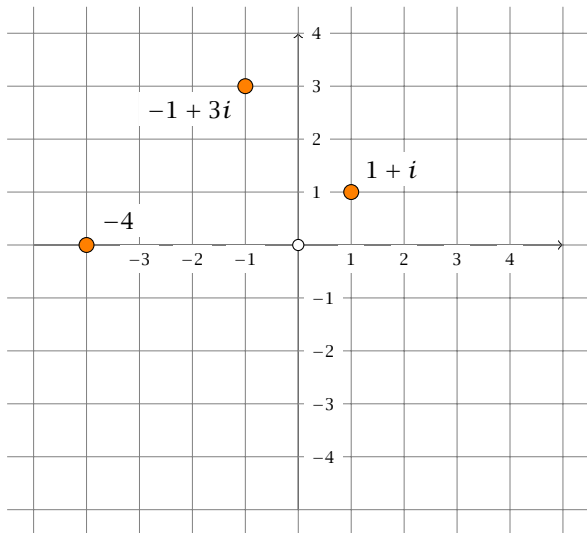
- Notre formule classique de résolution permet d'écrire :

$$z_{2/3} = \frac{4i \pm (2 - 2i)}{2} = 2i \pm (1 - i)$$

D'où les zéros : $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = -1 + 3i$.

Finalement, $f(z)$ admet les zéros z_1, z_2 et z_3 .

Voici enfin, dans le plan de Gauss, les trois points dont les affixes sont z_1, z_2, z_3



graphique qui ne fait guère avancer notre compréhension des nombres complexes. (Le triangle est-il rectangle?)

Réponse 3

1. Vous savez toutes et tous que : $3 - 4i = (2 - i)^2$. Mais le contexte semble suggérer que l'on demande un calcul explicite, avec tous les détails nécessaires, d'une racine carrée de $3 - 4i$. Si nous notons donc $a + bi$ une telle racine, la relation

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i$$

permet d'écrire, en comparant les modules, parties réelles, parties imaginaires, le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = |3 - 4i| = 5 \\ a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

parties réelles modules
parties imaginaires

On en déduit immédiatement :

$|a| = 2, |b| = 1, a$ et b de signes contraires.

D'où les deux racines carrées : $2 - i$ et $-2 + i$.

2. La réduction au second degré

Information : i devrait être une racine de $P(z)$. L'évaluation en i de $P(z)$ par le schéma de Horner permet d'écrire la factorisation :

$$P(z) = (z - i) \cdot (z^2 - 7i \cdot z - 13 + i)$$

donc $z_1 = i$ est bien un zéro de $P(z)$.

Résolution d'une équation de degré 2

Les racines de $z^2 - 7i \cdot z - 13 + i$:

- $\Delta = 3 - 4 \cdot i = (2 - i)^2$, d'après 1.
- $z_2 = 1 + 3i$ et $z_3 = -1 + 4i$.

Réponse 4

Factoriser « autant que possible » le polynôme nécessite le calcul de tous ses zéros, de toutes ses racines.

1. La réduction au second degré

Information : $-5i$ est une racine de $P(z)$.

En appliquant le schéma de Horner, nous obtenons :

$$P(z) = (z + 5i) \cdot (2z^2 + (-5 + 4i) \cdot z - 3 + 2i)$$

ce qui montre bien que $-5i$ est un zéro de P .

2. Résolution d'une équation de degré 2

Déterminons les zéros du trinôme auxiliaire

$$2 \cdot z^2 + (-5 + 4i) \cdot z - 3 + 2i$$

- $\Delta = 33 - 56i$

Déterminons les réels x et y tels que

$$(x + iy)^2 = 33 - 56i$$

Ces réels vérifient donc :

$$x^2 + y^2 = |33 - 56i| = 65$$

$$x^2 - y^2 = 33$$

$$2xy = -56$$

D'où l'on tire, d'un seul coup d'oeil, les informations suivantes : $x^2 = 49, y^2 = 16, x$ et y de signes contraires.

Mais alors : $\Delta = (7 - 4i)^2$

- *N'oubliez pas la dernière étape* : le calcul des deux zéros du trinôme auxiliaire :

$$z_2 = 3 - 2i, \quad z_3 = -\frac{1}{2}$$

Ces trois racines z_1, z_2, z_3 permettent d'écrire la factorisation :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z + 5i) \cdot 2 \left(z + \frac{1}{2} \right) (z - 3 + 2i) \\ &= (z + 5i)(2z + 1)(z - 3 + 2i) \end{aligned}$$

N'oubliez pas le coefficient dominant !

4 Équation non polynômiale

Réponse 5

1. *Transformation* : pour $z \notin \{0, -i\}$, on peut « chasser les dénominateurs » en multipliant par le DéCo :

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{z+i} = -1 \iff 2(z+i) - z = -z \cdot (z+i)$$

$$\iff z^2 + (1+i)z + 2i = 0$$

L'équation proposée est donc équivalente à une équation du second degré.

- Le discriminant en est

$$\Delta = -6i$$

$$= 3 \cdot (-2i)$$

$$= [\sqrt{3} \cdot (1-i)]^2$$

- Les solutions s'en déduisent aussitôt :

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \cdot i$$

2. (a) Forme algébrique de w :

$$w = -2 - 2\sqrt{3} \cdot i$$

Module de w : $|-2 - 2\sqrt{3}i| = 4$

- (b) *Racines carrées de w*

Si u et v sont deux réels tels que

$$(u + iv)^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

alors on a :

$$u^2 + v^2 = 4$$

$$u^2 - v^2 = -2$$

$$2uv < 0$$

Donc : $u^2 = 1$, $v^2 = 3$, u et v de signes contraires.

D'où les racines carrées de w :

$$r = 1 - i\sqrt{3} \quad s = \ominus r$$

- (c) Afin de déterminer les racines *quatrième* de w , nous devons calculer les racines *carrées* des deux complexes r et s :

- Racines carrées de r*

Notons a et b deux réels tels que

$$(a + ib)^2 = 1 - i\sqrt{3}$$

Alors a et b vérifient

$$a^2 + b^2 = |1 - i\sqrt{3}| = 2$$

$$a^2 - b^2 = 1$$

$$2ab < 0$$

c'est-à-dire $a^2 = \frac{3}{2}$, $b^2 = \frac{1}{2}$, a et b sont de signes contraires.

D'où les deux racines m et n de $1 - i\sqrt{3}$:

$$m = \sqrt{\frac{3}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad n = -m$$

- Racines carrées de s*

Remarquons que $s = i^2 \cdot r$. On en déduit les racines carrées de s :

$$i \cdot m = \sqrt{\frac{1}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

et

$$i \cdot n = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Les racines quatrième de w sont donc :

$$m = \sqrt{\frac{3}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}, i \cdot m, i^2 \cdot m, i^3 \cdot m$$

3. Même si cela n'était pas explicitement demandé : déterminons la forme trigonométrique de ces nombres complexes à partir de leurs formes algébriques.

- $|m| = \sqrt{2}$
- Si $\theta = \arg(m)$, alors

$$\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iff \theta \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$$

Comme m appartient au quatrième quadrant,

$$m = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

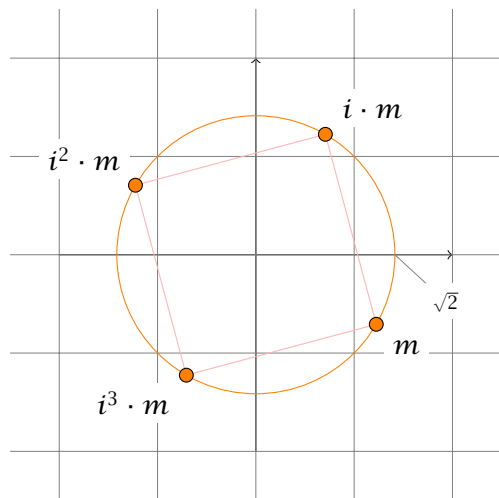
Et enfin

$$i \cdot m = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-m = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right)$$

$$-i \cdot m = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Les images des quatre racines constituent un carré dans le plan de Gauss.



5 Calcul « rapide » de la racine carrée

Nous avons répété à plusieurs reprises l'algorithme de la racine carrée qui est un algorithme simple et simple à retenir, mais un peu long.

Formules pratiques ?

Pour ceux parmi vous qui ont une excellente mémoire, voici une formule qui permet de calculer la racine carrée d'un nombre complexe $w = a + ib$. Notons m son module $|a + ib|$ (de sorte que nous avons $m^2 = a^2 + b^2$).

Posons :

$$z = \sqrt{\frac{m+a}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{m-a}{2}}$$

Vous vérifierez alors que

$$z^2 = \frac{m+a}{2} - \frac{m-a}{2} + 2i \cdot \sqrt{\frac{m^2 - a^2}{4}} = a + i \cdot |b|$$

Si $b > 0$, le nombre z est une racine carrée de w ;
si $b < 0$, on choisira par contre le conjugué \bar{z} de z .

Exemples

1. Si $w = 3 - 4i$, alors

$$m = 5; \quad z = \sqrt{\frac{5+3}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{5-3}{2}} \\ = 2 - i$$

2. Si $w = 33 - 56i$, alors

$$|w| = 65; \quad z = \sqrt{\frac{65+33}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{65-33}{2}} \\ = 7 - 4i$$

3. Si $w = -2 - 2\sqrt{3} \cdot i$, alors

$$|w| = 4; \quad z = \sqrt{\frac{4-2}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{4+2}{2}} \\ = 1 - \sqrt{3} \cdot i$$

4. Si $w = 1 - i\sqrt{3}$, alors

$$|w| = 2; \quad z = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{2-1}{2}} \\ = \sqrt{\frac{3}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$