Réponse 1

Soit le polynôme

$$P(z) = 3z^3 + (1+5\mathrm{i})z^2 + \left(\mathrm{i} - \tfrac{5}{2}\right)z - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}$$

1. Comme $|3+4\mathrm{i}| = 5$, *une* racine carrée de $3+4\mathrm{i}$ est

$$\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \mathrm{i}\cdot\sqrt{\frac{5-3}{2}} = 2+\mathrm{i}$$

et l'autre est donc $-2-\mathrm{i}$.

2. Vérifions, à l'aide du schéma de Horner, que $-\mathrm{i}$ est bien une racine de $P(z)$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1+5\mathrm{i} & \mathrm{i}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ z=-\mathrm{i} & & -3\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ \hline & 3 & 1+2\mathrm{i} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

Donc effectivement, $-\mathrm{i}$ est une racine de P ; de plus nous avons la factorisation :

$$P(z) = (z+\mathrm{i})\cdot\left(3z^2 + (1+2\mathrm{i})z - \tfrac{1}{2}\right)$$

Déterminons maintenant les zéros du trinôme

$$3z^2 + (1+2\mathrm{i})z - \tfrac{1}{2}$$

On a :
- $\Delta = 3+4\mathrm{i} = (2+\mathrm{i})^2$, d'après (1).
- d'où les racines du trinôme

$$z_1 = \frac{1-\mathrm{i}}{6} \qquad z_2 = \frac{-1-\mathrm{i}}{2}$$

Ensemble des solutions de l'équation proposée :

$$\boxed{\left\{-\mathrm{i};\quad \tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{6}\mathrm{i};\quad \tfrac{-1}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}}$$

Réponse 2

Forme trigonométrique de $z_1 = -\sqrt{3}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)$ *:*

$$\begin{aligned} |z_1| &= 2 \\ \arg(z_1) &\equiv \pi + \tan^{-1}\tfrac{1}{\sqrt{3}} \\ &\equiv \pi + \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\boxed{z_1 = 2\operatorname{cis}\left(\tfrac{7\pi}{6}\right)}$$

Forme trigonométrique de $z_2 = \sqrt{2}\cdot(1-\mathrm{i})$ *:*

$$\begin{aligned} |z_2| &= 2 \\ \arg(z_2) &\equiv \arctan(-1) \\ &\equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\boxed{z_2 = 2\operatorname{cis}\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)}$$

Forme trigonométrique de $z_1^7\cdot z_2^2$ *:*

$$\begin{aligned} z_1^7\cdot z_2^2 &= \left[2^7\operatorname{cis}\left(7\cdot\tfrac{7\pi}{6}\right)\right]\cdot\left[2^2\cdot\operatorname{cis}\left(2\cdot-\tfrac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2^9\operatorname{cis}\left(\frac{48\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \\ &= 2^9\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{-\pi}{2}\right) \\ &= \boxed{2^9\operatorname{cis}\frac{-\pi}{3}} \end{aligned}$$

Réponse 3

Forme algébrique de z_1 *:*

$$z_1 = -1+\mathrm{i}$$

Forme trigonométrique de $z_1 = -1\cdot(1-\mathrm{i})$ *:*

- $|z_1| = \sqrt{2}$
- $$\begin{aligned} \arg z_1 &\equiv \pi + \tan^{-1}(-1) \\ &\equiv \pi - \frac{\pi}{4} \\ &\equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

Forme trigonométrique de $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)$ *:*

- $|z_2| = \frac{1}{8}\cdot\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right| = \frac{1}{4}$
- $\arg z_2 \equiv \pi + \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

de sorte que

$$\boxed{z_2 = \tfrac{1}{4}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

Forme trigonométrique de $\frac{z_1^4}{z_2^3}$

$$\begin{aligned} \frac{z_1^4}{z_2^3} &= \frac{\left[2^{\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4}{\left[2^{-2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]^3} \\ &= \frac{2^2}{2^{-6}}\cdot\frac{\operatorname{cis}3\pi}{\operatorname{cis}\frac{5\pi}{2}} \\ &= \boxed{2^8\cdot\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Forme algébrique de ce nombre : 256i

Réponse 4

Forme trigonométrique de $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - \mathrm{i})$

- $|z_1| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$
- $\arg z_1 \equiv \overset{-1}{\tan} \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \equiv -\dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$

de sorte que

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{-\pi}{6}}$$

Forme trigonométrique de z_2 *:*

- $|z_2| = \dfrac{|1 + \mathrm{i}\sqrt{3}|}{|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}|} = \dfrac{2}{2} = 1$
- $\arg z_2 \equiv \arg\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) - \arg\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{-\pi}{3} \equiv \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$

de sorte que

$$\boxed{z_2 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}}$$

Forme trigonométrique de Z

$$\begin{aligned} z_1^{13} \cdot z_2^{7} &= \left[\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{-\pi}{6}\right]^{13} \cdot \left[\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right]^{7} \\ &= 2^6\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(13 \cdot \frac{-\pi}{6} + 7 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 64\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) \\ &= \boxed{64\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Forme algébrique de Z

$$\boxed{Z = 64\sqrt{2}\,\mathrm{i}}$$

Réponse 5

1. *Forme algébrique de* Z *:*

$$Z = -2 - 2\sqrt{3} \cdot i = -2 \cdot (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$$

2. *Forme trigonométrique de* Z *:*

   - $|Z| = 4$
   - $\arg Z \equiv \pi + \arctan\sqrt{3} \equiv \pi + \dfrac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

   de sorte que

$$\boxed{Z = 4 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

3. Notons $z = r \cdot \operatorname{cis} \alpha$ *une* racine quatrième de Z (où $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Alors

$$\begin{aligned} z^4 = Z &\iff r^4 \operatorname{cis} 4\alpha = 4 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &\iff r^4 = 4 \text{ et } 4\alpha \equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi] \\ &\iff r = \sqrt{2} \text{ et } \alpha \equiv \frac{\pi}{3} \quad \left[\frac{2\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

   D'où enfin *les* racines quatrièmes de Z :

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot z_0 \\ z_1 &= \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i} \cdot z_0 \\ z_2 &= \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}^2 \cdot z_0 \\ z_3 &= \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}^3 \cdot z_0 \end{aligned}$$

Réponse 6

1. *Forme trigonométrique de* $A = -4 \cdot (\sqrt{3} + \mathrm{i})$ *:*

   - $|A| = 4 \cdot 2 = 8$
   - $\arg A \equiv \pi + \overset{-1}{\tan} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \equiv \pi + \dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$

   de sorte que

$$\boxed{A = 8 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

2. Notons $z = r \operatorname{cis} \alpha$ *une* racine cubique de A ($r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$). Alors

$$\begin{aligned} z^3 = A &\iff r^3 \operatorname{cis}(3\alpha) = 8 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ &\iff r^3 = 8 \text{ et } 3\alpha \equiv \frac{7\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ &\iff r = 2 \text{ et } \alpha \equiv \frac{7\pi}{18} \pmod{\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

   D'où enfin *les* racines cubiques de A :

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{18} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{18} \\ z_1 &= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{18} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{cis} \frac{19\pi}{18} \\ z_2 &= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{18} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{cis} \frac{31\pi}{18} \end{aligned}$$

3. Un nombre *réel* admet comme argument 0 (mod π). Comme $\arg A = \frac{7\pi}{6}$, un argument de A^p (pour $p \in \mathbb{Z}$) est $p \cdot \frac{7\pi}{6}$; donc, par exemple pour $p = 6$, on a :

$$A^6 = 8^6 \operatorname{cis} 7\pi = -8^6 \in \mathbb{R}$$

   Tout multiple de 6 convient évidemment.

4. Un nombre complexe *imaginaire pur* admet comme argument $\frac{\pi}{2}$ (mod π). Mézalor on a, pour $p = 3$, par exemple :

$$A^3 = 8^3 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{2} = -8^3 \cdot \mathrm{i}$$