Réponse 1

1. De *l'Algèbre* vers la *Géométrie*

✔ *Interprétation géométrique* de la description *paramétrique* : le point $M(x;y;z)$ appartient à la droite d passant par le point A, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si

$$\exists t \in \mathbb{R}: \quad M = A + t \cdot \overrightarrow{u}$$

En comparant avec l'expression donnée, nous voyons que $A(1;3;-1)$ est donc un point de d et $\overrightarrow{u}(2;-1;1)$ en est un vecteur directeur.
On dit que $(A, \overrightarrow{u})$ est un *repère* de d.

2. De la *Géométrie* vers *l'Algèbre*

✔ *Observation essentielle* : comme $d \parallel d'$, ces deux droites admettent les mêmes vecteurs directeurs. Donc $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de d'.

✗ Un système d'équations *paramétriques* de d'

$$M(x;y;z) \in d \iff \exists t \in \mathbb{R} : M = B + t \cdot \overrightarrow{u}$$
$$\iff \boxed{\exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = 2 + t \end{cases}}$$

✗ Un système d'équations *cartésiennes* de d'

Méthode 1

Remarquons que t s'exprime aisément à l'aide de y. En effet $t = -y$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-y) \\ z = 2 + (-y) \end{cases}$$

ou, si vous y tenez vraiment :

$$\boxed{\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}} \qquad (*)$$

Méthode 2

On exprimera la proportionnalité des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ par le système

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

qui donne, après transformation, aussi $(*)$.

✔ N'oubliez pas l'*interprétation géométrique* de ces équations cartésiennes : c'est une représentation de d' comme intersection de deux plans.

3. De la *Géométrie* vers *l'Algèbre*

Remarquons d'abord que $B \notin d$ car le système

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ 0 = 3 - t \\ 2 = -1 + t \end{cases}$$

n'admet pas de solution. Il existe donc bien un plan passant par B et par d.

Méthode 1

Nous disposons donc de deux points de Π, à savoir A et B et d'un vecteur directeur, $\overrightarrow{u}$. Comme $A \in d$ et $B \notin d$, le vecteur $\overrightarrow{AB}(0;-3;3)$ est un deuxième vecteur directeur de Π, que l'on remplacera utilement par $\overrightarrow{v}(0;1;-1)$
D'où :

$$M(x;y;z) \in \Pi \iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right) = 0$$
$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-3 & -1 & 1 \\ z+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\iff \boxed{y + z - 2 = 0}$$

Méthode 2

Cette méthode est plus algébrique et strictement réservée à un public adulte.

Une représentation cartésienne de d s'écrit (facilement)

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Mais alors, si a et b sont des paramètres réels (non simultanément nuls), on peut affirmer que

$$a \cdot (x + 2y - 7) + b \cdot (y + z - 2) = 0$$

est l'équation *cartésienne* d'un plan qui passe évidemment par d. Pourquoi ?

Ajoutons à ce constat (laconique) encore la contrainte que ce plan doit passer par $B(1;0;2)$

$$a \cdot (1 + 2 \cdot 0 - 7) + b \cdot (0 + 2 - 2) = 0$$

et nous obtenons : $a = 0$ et b peut être quelconque. En prenant $b = 1$, on retrouve l'équation

$$y + z - 2 = 0$$

Morale de l'histoire : une réflexion (un tantinet plus) subtile permet d'éviter des calculs (nettement plus) fastidieux. ✔

Réponse 2

1. *Méthode 1*

On déterminera d'abord un système d'équations *paramétriques* de d :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

La deuxième équation permet d'écrire : $t = y$, de sorte que

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ z = -1 + 3y \end{cases}$$

ou, si vous préférez :

$$\boxed{\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3y - z - 1 = 0 \end{cases}}$$

Coup de bol : il était facile d'éliminer le paramètre.

Méthode 2

✔ On peut éviter de passer par la représentation paramétrique par le raisonnement suivant [1].
Essayons de trouver deux plans passant par A et ayant $\overrightarrow{u}$ comme vecteur directeur :

✗ On *voit* que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}(1;0;0)$ et $\overrightarrow{v}(0;0;1)$ ne sont pas colinéaires avec $\overrightarrow{u}$.

✗ Équation du plan Π_1 par A, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_1}$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z+1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff 3y - z - 1 = 0$$

✗ Équation du plan Π_2 par A, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_2}$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z+1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + 2y - 3 = 0$$

Tiens ! On retrouve les mêmes équations ...

2. $B \in d$ si et seulement si les coordonnées de B vérifient les équations obtenues précédemment :

$$\begin{cases} -1 + 2 \cdot 2 - 3 \overset{!}{=} 0 \\ 3 \cdot 2 - 5 - 1 \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

✔ 3. Le plan Π est *perpendiculaire* à d si et seulement si un vecteur *directeur* de d (par exemple $\overrightarrow{u}(-2;1;3)$) est un vecteur *normal* de Π.
L'équation cartésienne de Π est donc de la forme

$$-2x + y + 3z + k = 0$$

où k reste à déterminer. Mais, comme $\Pi \ni B$:

$$-2 \cdot (-1) + 2 + 3 \cdot 5 + k = 0 \iff k = -19$$

on a finalement :

$$\boxed{\Pi \equiv -2x + y + 3z - 19 = 0}$$

4. L'équation cartésienne de Π permet de déterminer sous quelles conditions le point C appartient au plan Π.
$C(5;2;\alpha) \in \Pi$ si et seulement si

$$-2 \cdot 5 + 2 + 3 \cdot \alpha - 19 = 0 \iff \alpha = 9$$

Précisons enfin la *nature* (les particularités géométriques) du triangle ABC.
On vient de voir que le point B est le point d'intersection de Π et d ; de plus, $A \in d$ et $d \perp \Pi$. Par conséquent, le triangle ABC est *rectangle* en B.

Réponse 3

1. Le point A n'appartient pas à d puisque le système

$$\begin{cases} 2 = 3 + 2\lambda \\ -3 = -2 - \lambda \\ 5 = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

n'admet pas de solution.

2. La représentation algébrique de la droite d montre qu'elle passe par $B(3;-2;1)$ et admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{v}(2;-1;3)$.
Le plan Π est donc défini par le *repère* $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{v})$; d'où l'équation cartésienne :

$$M(x;y;z) \in \Pi \iff \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+3 & 1 & -1 \\ z-5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\iff \boxed{x + 11y + 3z + 16 = 0}$$

3. La droite d est *perpendiculaire* à Π' si et seulement si son vecteur *directeur* $\overrightarrow{v}(2;-1;3)$ est un vecteur *normal* de Π'. ✔
Nous connaissons donc la partie homogène d'une équation *cartésienne* de Π'

$$\Pi' \equiv 2x - y + 3z + k = 0$$

le terme constant k nous étant fourni par

$$A(2;-3;5) \in \Pi' \iff 2 \cdot 2 - (-3) + 3 \cdot 5 + k = 0$$
$$\iff k = -22$$

D'où finalement une équation cartésienne de Π' :

$$\boxed{\Pi' \equiv 2x - y + 3z - 22 = 0}$$

4. Les droites d et d' sont *parallèles* si et seulement si elles ont les mêmes vecteurs directeurs. ✔

✗ D'où immédiatement un système d'équations *paramétriques* de d' :

$$d' \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

✗ La seconde des équations précédentes permet d'exprimer λ à l'aide de y : $\lambda = -3 - y$, de sorte que, en éliminant le paramètre λ

[1] Non, on n'est pas obligé de procéder ainsi. Oui, on peut faire autrement. Non, il n'est nullement interdit de devenir plus intelligent. Même en Première C.

dans les équations (1) et (3), nous obtenons le système d'équations *cartésiennes*

$$d' \equiv \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot (-3 - y) \\ z = 5 + 3 \cdot (-3 - y) \end{cases}$$

Vous préférez sans doute une version moins alambiquée de ces équations :

$$\boxed{d' \equiv \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 3y + z + 4 = 0 \end{cases}}$$

Réponse 4

✔ 1. Si $d \perp \Pi$, alors le vecteur *normal* $\overrightarrow{n}\,(1;-2;-1)$ de Π est un vecteur *directeur* de d.

✗ On en déduit immédiatement un système d'équations paramétriques de d :

$$M(x;y;z) \in d \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

✗ Un tel point $M(x;y;z)$ appartient donc aussi au plan Π si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire si et seulement si

$$(-1 + t) - 2(-2 - 2t) - (1 - t) = 8$$

équation dont l'unique solution est $t = 1$.

D'où les coordonnées du point d'intersection : $I(0;-4;0)$.

2. Remarquons que A et g définissent bien un plan puisque l'on vérifie que $A \notin g$, vérification laissée à la sagacité de la lectrice.

Méthode 1

✔ Nous allons déterminer la représentation *paramétrique* de g pour construire un *repère* de Π'.

✗ On constate qu'il est de nouveau très (trop ?) facile d'établir un système d'équations *paramétriques* de la droite g (en choisissant par exemple l'ordonnée comme paramètre t) :

$$g \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Cette représentation nous permet de déterminer un point $B(4;0;3)$ de g ainsi qu'un vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(1;1;-1)$.

✗ Le plan Π' est donc défini par le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{v})$, observation qui permet d'en établir une équation *cartésienne* :

$$M(x;y;z) \in \Pi \iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{v}\right) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x+1 & 5 & 1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \boxed{4x - 7y - 3z - 7 = 0}$$

Méthode 2

Reprenons la méthode algébrique déjà utilisée dans l'exercice 1.

Si a et b sont des paramètres réels (non simultanément nuls), on peut affirmer que

$$a \cdot (x - y - 4) + b \cdot (y + z - 3) = 0 \qquad \text{(E)}$$

est l'équation cartésienne d'un plan qui passe évidemment par g. Le point $A(-1;-2;1)$ appartient à un tel plan si et seulement si

$$a \cdot [(-1) - (-2) - 4] + b \cdot [(-2) + 1 - 3] = 0$$

ce qui donne, après simplification, une relation entre a et b

$$3a + 4b = 0$$

$a = 4$, $b = -3$ (par exemple) sont des nombres qui conviennent, ce qui donne l'équation cartésienne

$$4 \cdot (x - y - 4) - 3 \cdot (y + z - 3) = 0$$

ou encore

$$4x - 7y - 3z - 7 = 0$$

Tiens ! On obtient la même équation que précédemment ...

Réponse 5

1. Le point A n'appartient pas à d puisque le système

$$\begin{cases} 3 = 2 + \beta \\ 1 = -1 - \beta \\ 0 = 0 + 2\beta \end{cases}$$

n'admet pas de solution.

2. Deux droites *parallèles* ont les mêmes vecteurs *directeurs*. ✔

Le vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1;-1;2)$ de d est donc aussi un vecteur directeur de d'.

✗ La droite d' ayant comme repère $(A;\overrightarrow{u})$, un système d'équations *paramétriques* de d' s'écrit :

$$\boxed{d' \equiv \begin{cases} x = 3 + \beta \\ y = 1 - \beta \qquad\qquad (\beta \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 2\beta \end{cases}}$$

✗ On peut en déduire immédiatement un système d'équations cartésiennes de d' par *élimination du paramètre*[2] β.
La première de ces équations permet d'écrire : $\beta = x - 3$, relation qui permet d'éliminer le paramètre dans les deux autres équations ; ce faisant, nous obtenons une représentation de d' comme intersection de deux plans :

$$d' \equiv \begin{cases} y = 1 - (x-3) \\ z = 2 \cdot (x-3) \end{cases}$$

$$d' \equiv \boxed{\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - z - 6 = 0 \end{cases}}$$

3. ✗ Les équations paramétriques de d permettent de vérifier aussitôt que $d \not\ni A$: le plan Π est partant bien défini.
   ✗ Comme de plus, le point $B(2;-1;0)$ appartient à d, le plan Π peut donc être décrit par le repère $(A;\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB})$ de sorte qu'une équation *cartésienne* de Π s'obtient par les calculs

$$M(x;y;z) \in \Pi \iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right) = 0$$
$$\iff \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ y-1 & -1 & -2 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$\iff \boxed{4x - 2y - 3z - 10 = 0}$$

Évidemment, vous auriez aussi pu prendre B comme origine du repère.

4. Un vecteur *normal* de Π est alors

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Réponse 6

Le but de l'exercice est d'analyser les *positions relatives* des trois plans en fonction du paramètre m :
- Est-ce qu'ils sont parallèles tous les trois ?
- Est-ce que deux d'entre eux sont parallèles ?
- Sinon : quelle est leur intersection ?

1. Notons $\overrightarrow{n_i}$ un vecteur *normal* du plan Π_i, pour $i \in \{1;2;3\}$:

$$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} m \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Les trois plans sont *parallèles* si et seulement si leurs vecteurs normaux sont *colinéaires*. Or il est facile de constater que $\overrightarrow{n_1}$ n'est pas un multiple de $\overrightarrow{n_3}$. Donc, les trois plans ne peuvent être parallèles, quelle que soit la valeur du paramètre m.

3. Les trois plans ont un seul point d'intersection si et seulement si les trois vecteurs normaux pointent dans trois directions différentes.
4. Dans ce cas, le parallélépipède construit sur les trois vecteurs normaux a un volume non nul, et dans ce cas seulement.
5. Les plans ont donc un seul point d'intersection si et seulement si

$$\det\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2};\overrightarrow{n_3}\right) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 15 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$
$$\iff m \neq 10$$

Calculons[3] les coordonnées $I_m(x;y;z)$ de l'unique point d'intersection I de ces trois plans ; $(x;y;z)$ doit vérifier le système

$$\begin{cases} -6x + 3y - 9z = 5 \\ mx - 5y + 15z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Résolvons ce système à l'aide de la méthode des déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -9 \\ m & -5 & 15 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6m + 60$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -9 \\ 0 & -5 & 15 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -50$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -6 & 5 & -9 \\ m & 0 & 15 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4m + 165$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 5 \\ m & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m + 55$$

et enfin

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$
$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

6. Pour $m = 10$, on a manifestement : $\overrightarrow{n_2} = 5 \cdot \overrightarrow{n_1}$, ce qui signifie que Π_1 et Π_2 sont *parallèles*. Comme $O \in \Pi_2$ et que $O \notin \Pi_1$, ces deux plans sont mêmes *strictement* parallèles.
Cependant d'après le premier point, ils ne sont pas parallèles à Π_3.
Donc les trois plans n'ont aucun point commun.

2. Les coefficients de β étant tellement agréables.

3. Oui, je sais : ce n'est pas explicitement demandé.