1 Problèmes algébriques

Exercice 1

Le terme général du développement s'écrit

$$\mathbf{C}_{12}^{k}\cdot\left(2x^{3}\right)^{k}\cdot\left(-\tfrac{1}{3}x^{-1}\right)^{12-k}=\mathbf{C}_{12}^{k}\cdot 2^{k}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{12-k}\cdot x^{3k-(12-k)}$$
$$=\mathbf{C}_{12}^{k}\cdot 2^{k}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{12-k}\cdot x^{4k-12}$$

On en déduit que $4k-12=16$, de sorte que $k=7$. D'où

$$\mathbf{C}_{12}^{7}\cdot 2^{7}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{5}\cdot x^{16}=-\frac{11264}{27}x^{16}$$

Exercice 2

Le terme général du développement s'écrit

$$\mathbf{C}_{15}^{k}\cdot\left(4x^{3}\right)^{k}\cdot\left(-\frac{1}{2x^{2}}\right)^{15-k}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{C}_{15}^{k}\cdot(4)^{k}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{15-k}\cdot x^{3k-2(15-k)}$$

Le terme constant s'obtient lorsque

$$3k-2(15-k)=0$$

c'est-à-dire si et seulement si $k=6$; d'où finalement

$$\mathbf{C}_{15}^{6}\cdot 4^{6}\cdot\left(-\frac{1}{2^{9}}\right)=-40\,040$$

Exercice 3

Le terme général du développement s'écrit

$$\mathbf{C}_{10}^{k}\cdot\left(3x^{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{2}{x^{2}}\right)^{10-k}=\mathbf{C}_{10}^{k}\cdot 3^{k}\cdot 2^{10-k}\cdot x^{3k-2(10-k)}$$

Alors $3k-2(10-k)=10 \iff k=6$, de sorte que le coefficient de x^{10} est

$$\mathbf{C}_{10}^{6}\cdot 3^{6}\cdot 2^{4}=2\,449\,440$$

Exercice 4

Le terme général s'écrit

$$\mathbf{C}_{11}^{k}\cdot\left(3x^{2}\right)^{k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^{11-k}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{C}_{11}^{k}\cdot 3^{k}\cdot(-1)^{11-k}\cdot x^{2k-(11-k)}$$

Alors $2k-(11-k)=7 \iff k=6$; d'où le terme en x^{7} :

$$\mathbf{C}_{11}^{6}\cdot 3^{6}\cdot(-1)^{5}\cdot x^{7}=-336\,798\,x^{7}$$

Exercice 5

Le terme général du développement s'écrit

$$\mathbf{C}_{18}^{k}\cdot\left(\sqrt{2}\,x^{2}\right)^{k}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^{18-k}$$

ou, après avoir regroupé les x

$$\mathbf{C}_{18}^{k}\cdot\sqrt{2}^{k}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{18-k}x^{2k-(18-k)}$$

Comme $2k-(18-k)=12 \iff k=10$, ce terme s'écrit :

$$\mathbf{C}_{18}^{10}\cdot\sqrt{2}^{10}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{8}\cdot x^{12}=\mathbf{C}_{18}^{10}\cdot 2^{5}\cdot\tfrac{1}{2^{8}}\cdot x^{12}$$

et finalement

$$\frac{21\,879}{4}x^{12}$$

Exercice 6

Le binôme admet le développement de Newton

$$\left(2x^{3}+\frac{5}{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\mathbf{C}_{10}^{k}\cdot\left(2x^{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{5}{x}\right)^{10-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{10}\mathbf{C}_{10}^{k}\cdot 2^{k}\cdot 5^{10-k}\cdot x^{3k-(10-k)}$$

Comme $3k-(10-k)=6 \iff k=4$, le terme en x^{6} s'écrit donc

$$\mathbf{C}_{10}^{4}\cdot 2^{4}\cdot 5^{6}\cdot x^{6}=52\,500\,000\cdot x^{6}$$

Exercice 7

Le terme général du développement est

$$\mathbf{C}_{10}^{k}\cdot\left(3x^{3}\right)^{k}\cdot\left(-\frac{2}{x^{2}}\right)^{10-k}$$

c'est-à-dire, après quelques infimes réarrangements :

$$\mathbf{C}_{10}^{k}\cdot 3^{k}\cdot(-2)^{10-k}\cdot x^{3k-2(10-k)}$$

Comme $3k-2(10-k)=-5 \iff k=3$, le terme en x^{-5} s'écrit finalement :

$$\mathbf{C}_{10}^{3}\cdot 3^{3}\cdot(-2)^{7}\cdot x^{-5}=-414\,720\cdot x^{-5}$$

2 Probabilités

Exercice 8

Nombre de cas possibles : $\mathbf{A}_{10}^{5}$.

1.

$$P\{\text{au moins une verte}\}=1-P\{\text{aucune verte}\}$$
$$=1-\frac{\mathbf{A}_{6}^{5}}{\mathbf{A}_{10}^{5}}$$
$$=\frac{41}{42}$$

2.

$$P\{1 \text{ blanche } \textit{suivie de } 4 \text{ vertes}\} = \frac{6 \cdot \mathbf{A}_4^4}{\mathbf{A}_{10}^5} = \frac{1}{210}$$

3.

$$P\{\text{une seule blanche}\} = \frac{(6 \cdot 5) \cdot \mathbf{A}_4^4}{\mathbf{A}_{10}^5} = \frac{1}{42}$$

4.

$$P\{3 \text{ blanches } \textit{suivies de } 2 \text{ vertes}\} = \frac{\mathbf{A}_6^3 \cdot \mathbf{A}_4^2}{\mathbf{A}_{10}^5} = \frac{1}{21}$$

5.

$$P\{\text{exactement } 3 \text{ blanches}\} = \frac{\mathbf{C}_5^3 \cdot \mathbf{A}_6^3 \cdot \mathbf{A}_4^2}{\mathbf{A}_{10}^5} = \frac{10}{21}$$

Exercice 9

Nombre de cas possibles : $\mathbf{A}_{32}^2$

1.

$$P\{\textit{aucun} \text{ coeur}\} = \frac{\mathbf{A}_{24}^2}{\mathbf{A}_{32}^2} = \frac{552}{992} \approx 56\,\%$$

2.

$$P\{\textit{au moins un} \text{ coeur}\} = 1 - P\{\text{aucun coeur}\}$$

3.

$$P\{\textit{exactement} \text{ deux coeurs}\} = \frac{\mathbf{A}_8^2}{\mathbf{A}_{32}^2}$$

Exercice 10

1. $\mathbf{C}_4^1 \cdot \mathbf{A}_8^4 = 6\,720$
2. $\mathbf{C}_5^3 \cdot 3! \cdot \mathbf{A}_6^2$
3. $\mathbf{C}_5^3 \cdot \mathbf{A}_6^2$
4. $3 \cdot 3! \cdot \mathbf{A}_6^2$
5. $3 \cdot \mathbf{A}_6^2$

Exercice 11

Nombre de cas possibles : $\mathbf{C}_{52}^6$.
Indiquons le nombre de cas favorables aux évènements décrits.

1. 2 as $\times$ 2 rois $\times$ 2 autres cartes : $\mathbf{C}_4^2 \cdot \mathbf{C}_4^2 \cdot \mathbf{C}_{44}^2$
2. Pour chacune des 4 couleurs, il y a
   - $\mathbf{C}_{13}^5 \cdot \mathbf{C}_{39}^1$ mains contenant exactement 5 cartes de cette couleur
   - $\mathbf{C}_{13}^6$ mains contenant exactement 6 cartes de cette couleur

   D'où le nombre de cas favorables :

$$4 \cdot (\mathbf{C}_{13}^5 \cdot 39 + \mathbf{C}_{13}^6)$$