Exponentielles

1. *Conditions d'existence* : l'expression donnée est définie par tout x réel.
Transformation de l'*équation principale* :

$$2^{x+2} + 2^{1-x} = 9 \iff 4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 9 \quad | \cdot 2^x$$
$$\iff \mathbf{4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0}$$

On essaie de se ramener à une *forme canonique*, standard (le second membre est toujours 0, par exemple).

Le CHV $t = 2^x$ conduit à l'*équation auxiliaire* (du second degré)

$$4t^2 - 9t + 2 = 0$$

Nous sommes ramenés, comme si souvent, à la **résolution d'une équation de degré 2**

qui admet les solutions $t = \frac{1}{4}$ et $t = 2$.
Revenons à l'équation principale (nous connaissons maintenant les valeurs possibles de 2^x) :

$$2^x = \tfrac{1}{4} = 2^{-2} \iff x = -2$$
$$2^x = 2 = 2^1 \iff x = 1$$

Ensemble des solutions de l'EP : $\{\mathbf{-2; 1}\}$

2. Condition d'existence : l'expression donnée est définie par tout x réel.
Transformation de l'*équation principale* :

$$2^{1-2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 \iff \mathbf{2 \cdot (2^{-x})^2 + 2^{-x} - 3 = 0}$$

Le CHV $t = 2^{-x}$ conduit à l'EA :

$$2t^2 + t - 3 = 0$$

…de degré 2 …

dont les solutions sont 1 et $-\frac{3}{2}$.
Revenons à l'EP :

$$2^{-x} = 1 \iff x = 0$$
$$2^{-x} = -\tfrac{3}{2} \qquad \text{cette équation n'admet pas de solutions}$$

Ensemble des solutions de l'EP : $\{\mathbf{0}\}$

3. *Conditions d'existence* : l'expression donnée est définie par tout x réel.
Transformations de l'inéquation principale :

Le premier exemple d'une **inéquation**

$$5^{1-2x} + 25^{1+x} \le 30 \iff 5 \cdot 5^{-2x} + 25 \cdot 5^{2x} - 30 \le 0 \quad | \div 5$$
$$\iff 5^{-2x} + 5 \cdot 5^{2x} - 6 \le 0 \quad | \cdot 5^{2x}$$
$$\iff 1 + 5 \cdot \left(5^{2x}\right)^2 - 6 \cdot 5^{2x} \le 0$$
$$\iff \mathbf{5 \cdot \left(5^{2x}\right)^2 - 6 \cdot 5^{2x} + 1 \le 0}$$

Le CHV : $t = 5^{2x}$ conduit à l'*inéquation auxiliaire*

$$5t^2 - 6t + 1 \le 0$$

Vous pouvez, si vous en avez besoin, construire un **tableau des signes** pour cette inéquation du second degré.

dont l'ensemble des solutions est $[\frac{1}{5}; 1]$
On en déduit :

$$\tfrac{1}{5} \le 5^{2x} \le 1 \iff 5^{-1} \le 5^{2x} \le 5^0$$
$$\iff -1 \le 2x \le 0$$

Ensemble des solutions : $\left[\mathbf{-\frac{1}{2}; 0}\right]$.

4. Conditions d'existence : l'expression donnée est définie par tout x réel.
Transformations de l'équation principale :

$$\begin{aligned} e^x + e^{1-x} = e + 1 &\iff e^x + e \cdot e^{-x} - (e+1) = 0 \quad | \cdot e^x \\ &\iff (e^x)^2 + e - (e+1) \cdot e^x = 0 \\ &\iff (e^x)^2 - (e+1)e^x + e = 0 \end{aligned}$$

Le CHV $w = e^x$ conduit à l'équation auxilaire

$$w^2 - (e+1) \cdot w + e = 0$$

dont les solutions sont 1 et e.
D'où les solutions de l'équation principale :

$$e^x = 1 \iff x = 0 \qquad\qquad e^x = e \iff x = 1$$

5. Conditions d'existence : l'expression donnée est définie par tout x réel.
Transformation de l'inéquation principale

$$6e^x - 7 - 14e^{-x} + 15e^{-2x} \geq 0 \quad \Big| \cdot e^{2x} \iff 6\,(e^x)^3 - 7\,(e^x)^2 - 14e^x + 15 \geq 0$$

Le CHV $z = e^x$ conduit à l'inéquation auxiliaire

Inéquation de degré 3

$$6z^3 - 7z^2 - 14z + 15 \geq 0$$

Les racines du polynôme sont $-\frac{3}{2} < 1 < \frac{5}{3}$, avec l'alternance de signe qui s'en déduit : $- + - +$
L'IA admet par conséquent comme ensemble des solutions $[-\frac{3}{2}; 1] \cup [\frac{5}{3}; \infty)$.
On en déduit pour les solutions de l'inéquation principale

Ces zéros peuvent être déterminés par Horner, en notant la « racine évidente » 1.

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{2} \leq e^x \leq 1 &\iff x \leq 0 \\ e^x \geq \tfrac{5}{3} &\iff x \geq \ln\tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

de sorte que l'ensemble des solutions de l'inéquation principale s'écrit

$$(-\infty; 0] \cup [\ln\tfrac{5}{3}; +\infty)$$

6. Conditions d'existence : l'expression donnée est définie par tout x réel.
Transformation de l'équation principale :

$$\begin{aligned} 40 \cdot e^{-x} + 2 + e^{2x} = 7e^x \quad | \cdot e^x &\iff 40 + 2e^x + (e^x)^3 = 7\,(e^x)^2 \\ &\iff (e^x)^3 - 7\,(e^x)^2 + 2e^x + 40 = 0 \end{aligned}$$

Le CHV $z = e^x$ conduit à l'équation auxiliaire

$$z^3 - 7z^2 + 2z + 40 = 0$$

dont les solutions sont -2, 4 et 5. D'où

On trouve rapidement le zéro -2

$$\begin{aligned} e^x &= -2 : \text{impossible} \\ e^x = 5 &\iff x = \ln 5 \\ e^x = 4 &\iff x = \ln 4 \end{aligned}$$

Ensemble des solutions : $\{\ln 4; \ln 5\}$

7. Condition d'existence : $x \neq 0$ parce que $\ln 1 = 0$.
Transformation de l'inéquation principale :

Le premier exemple qui fait intervenir une **fraction rationnelle** : attention au dénominateur.
Ne multipliez surtout pas par le dénominateur !

$$\frac{2e^x+1}{e^x-1} \leq e^x+3 \iff \frac{2e^x+1}{e^x-1} - (e^x+3) \leq 0$$

Réduction au même dénominateur

$$\iff \frac{2e^x+1-(e^x+3)(e^x-1)}{e^x-1} \leq 0$$
$$\iff \frac{4-(e^x)^2}{e^x-1} \leq 0$$

Le CHV $u = e^x$ conduit à l'inéquation auxiliaire

$$\frac{u^2-4}{u-1} \geq 0$$

La fraction rationnelle change de signe en -2, 1 et 2, sa « signature » étant $- + - +$. L'ensemble des solutions de l'IA est donc $[-2;1] \cup [2;+\infty)$.

Vous pouvez évidemment construire un tableau des signes

On en déduit, pour les solutions de l'inéquation principale :

$$e^x \in [-2;1] \iff x \leq 0 \text{ (et } x \neq 0\text{, n'oubliez pas la CE)}$$
$$e^x \in [2;+\infty) \iff x \geq \ln 2$$

de sorte que l'ensemble des solutions est finalement :

$$(-\infty;0[\cup [\ln 2;+\infty)$$

8. Condition d'existence : $x \neq \ln 4$.
Le CHV $v = e^x$ conduit à l'inéquation auxiliaire

$$\frac{v^2-6}{v-4} \leq 0$$

dont l'ensemble des solutions est évidemment

$$(-\infty;-\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6};4[$$

On en déduit, pour les solutions de l'inéquation principale

$$e^x \in (-\infty;-\sqrt{6}] : \text{impossible}$$
$$e^x \in [\sqrt{6};4[\iff x \in [\ln\sqrt{6};\ln 4[$$

Logarithmes

1. Conditions d'existence :

$$x^2-x-2>0 \text{ et } x-1>0$$

ce qui équivaut à : $x > 2$.
Transformation de l'inéquation principale : pour $x > 2$, nous avons les équivalences

$$\frac{\ln(x^2-x-2)}{\ln(4)} < \frac{\ln(x-1)}{\ln 2} \quad \Bigg| \quad \cdot \ln 4 = 2\ln 2 \iff x^2-x-2 < (x-1)^2$$
$$\iff x < 3$$

Ensemble des solutions : $]2;3[$.

2. Conditions d'existence : $3-x>0$ et $x>0$ et $x-1>0$, ce qui équivaut à : $1<x<3$.
Transformations de l'équation principale : pour $x \in]1;3[$

$$\begin{aligned}
2\ln 3-\ln(3-x)=\ln x-2\ln(x-1) &\iff 2\ln 3+2\ln(x-1)=\ln(3-x)+\ln x\\
&\iff \ln\left(9(x-1)^2\right)=\ln\left(x\cdot(3-x)\right)\\
&\iff 9(x-1)^2=x(3-x)\\
&\iff 10x^2-21x+9=0\\
&\iff x\in\left\{\tfrac{3}{2};\tfrac{3}{5}\right\}\cap\ ]1;3[\\
&\iff x=\tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

3. Conditions d'existence : $2x+1>0$ et $3-2x>0$, ce qui équivaut à : $x\in]-\frac{1}{2};+\frac{3}{2}[$.
Transformation de l'inéquation principale : pour $x\in\ ]-\frac{1}{2};+\frac{3}{2}[$ nous pouvons écrire les équivalences

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1)-\ln 3-\ln\sqrt{3-2x}\le 0 &\iff \ln(2x+1)\le\ln 3+\tfrac{1}{2}\ln(3-2x) \quad |\cdot 2\\
&\iff \ln\left[(2x+1)^2\right]\le\ln\left[9\cdot(3-2x)\right]\\
&\iff (2x+1)^2\le 9\cdot(3-2x)\\
&\iff 4x^2+22x-26\le 0\\
&\iff x\in[\tfrac{13}{2};1]\cap\ ]-\tfrac{1}{2};+\tfrac{3}{2}[\\
&\iff x\in]-\tfrac{1}{2};+1[
\end{aligned}$$

4. Conditions d'existence :

$$2x-1>0 \text{ et } 3x-x^2>0 \text{ et } 4x-3>0 \text{ et } x>0$$

conditions équivalentes à $x\in]\frac{3}{4};\frac{3}{2}[$.
Transformations de l'inéquation principale : pour $x\in]\frac{3}{4};\frac{3}{2}[$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
2\ln(2x-1)-\ln(3x-2x^2)>\ln(4x-3)-\ln(x) &\iff 2\ln(2x-1)+\ln x>\ln(4x-3)+\ln(3x-2x^2)\\
&\iff \ln\left[(2x-1)^2\cdot x\right]>\ln\left[(4x-3)(3x-2x^2)\right]\\
&\iff (2x-1)^2\cdot x>(4x-3)(3-2x)\cdot x\\
&\iff (2x-1)^2>(4x-3)(3-2x)\\
&\iff 12\,x^2-22\,x+10>0\\
&\iff 2\ (x-1)\ (6\,x-5)>0\\
&\iff x\in\left((-\infty;\tfrac{5}{6}[\cup]1;+\infty)\right)\cap]\tfrac{3}{4};\tfrac{3}{2}[\\
&\iff x\in]\tfrac{3}{4};\tfrac{5}{6}[\cup]1;\tfrac{3}{2}[
\end{aligned}$$

5. Conditions d'existence :

$$1-2x>0 \text{ et } x^2-4>0$$

conditions équivalentes à : $x\in(-\infty;-2[$
Transformations de l'inéquation principale : pour $x\in(-\infty;-2[$ nous

N'oubliez pas que $\ln 4=2\ln 2$

avons

$$\log_2(1-2x)-\log_4 5 \geq \log_4(x^2-4) \iff \frac{\ln(1-2x)}{\ln 2}-\frac{\ln 5}{2\ln 2} \geq \frac{\ln(x^2-4)}{2\ln 2} \quad \Big| \cdot 2\ln 2$$
$$\iff 2\ln(1-2x)-\ln 5 \geq \ln(x^2-4)$$
$$\iff \ln\left[(1-2x)^2\right] \geq \ln\left[5(x^2-4)\right]$$
$$\iff (1-2x)^2 \geq 5(x^2-4)$$
$$\iff x^2+4x-21 \leq 0$$
$$\iff x \in [-7;+3]$$

de sorte que (en tenant compte des conditions d'existence) l'ensemble des solutions de l'IP est $[-7;-2[$.

6. Conditions d'existence :

$$4-3x>0 \text{ et } 3-2x>0 \text{ et } x>0$$

conditions équivalentes à la relation : $x \in]0;\frac{4}{3}[$.
Transformations de l'inéquation principale : pour $x \in]0;\frac{4}{3}[$, nous avons les équivalences

$$\frac{1}{2}\cdot\log_2(4-3x) \leq \log_2(3-2x)+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x} \iff \frac{\frac{1}{2}\cdot\ln(4-3x)}{\ln 2} \leq \frac{\ln(3-2x)}{\ln 2}+\frac{\frac{1}{2}\ln x}{-\ln 2} \quad \Big| \cdot 2\ln 2$$
$$\iff \ln(4-3x) \leq 2\ln(3-2x)-\ln(x)$$
$$\iff \ln(4-3x)+\ln(x) \leq \ln\left[(3-2x)^2\right]$$
$$\iff \ln\left[(4-3x)\cdot x\right] \leq \ln\left[(3-2x)^2\right]$$
$$\iff (4-3x)\cdot x \leq (3-2x)^2$$
$$\iff 7x^2-16x+9 \geq 0$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation auxiliaire

$$7x^2-16x+9 \geq 0$$

est $(-\infty;1] \cup [\frac{9}{7};+\infty)$.
On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation principale

$$\Big((-\infty;1] \cup [\tfrac{9}{7};+\infty)\Big) \cap]0;\tfrac{4}{3}[\; = \;]0;1] \cup [\tfrac{9}{7};\tfrac{4}{3}[$$

7. Conditions d'existence :

$$2x-3>0 \text{ et } 10-4x>0$$

Le domaine d'existence est donc : $\mathcal{D} =]\frac{3}{2};\frac{5}{2}[$.
Transformations de l'inéquation principale : pour $x \in \mathcal{D}$, nous avons les équivalences

$$2\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+\log_2(10-4x) \leq 1 \iff \frac{2\ln(2x-3)}{-\ln 2}+\frac{\ln(10-4x)}{\ln 2} \leq 1 \quad \Big| \cdot \ln 2$$
$$\iff -2\ln(2x-3)+\ln(10-4x) \leq \ln 2$$
$$\iff \ln(10-4x) \leq \ln 2+2\ln(2x-3)$$
$$\iff \ln(10-4x) \leq \ln\left[2\cdot(2x-3)^2\right]$$
$$\iff 10-4x \leq 2\cdot(2x-3)^2$$
$$\iff 8x^2-20x+8 \geq 0$$
$$\iff 2x^2-5x+2 \geq 0$$

L'inéquation auxiliaire

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

admet comme ensemble des solutions $S_{\text{aux}} = (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$.
D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation principale

$$\mathcal{D} \cap S_{\text{aux}} = [2; \tfrac{5}{2}[$$

8. Conditions d'existence :

$$3 - x > 0 \text{ et } x + 1 > 0 \text{ et } 1 - x > 0$$

Le domaine d'existence est donc : $]-1; +1[$.
Transformations de l'inéquation principale : pour $x \in]-1; +1[$, nous pouvons écrire les équivalences

$$\begin{aligned}
\log_3(3-x) - 4\log_9(x+1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(1-x) &\iff \frac{\ln(3-x)}{\ln 3} - 4 \cdot \frac{\ln(x+1)}{2\ln 3} \leq \frac{\ln(1-x)}{-\ln 3} \quad \Big| \cdot \ln 3 \\
&\iff \ln(3-x) - 2\ln(x+1) \leq -\ln(1-x) \\
&\iff \ln(3-x) + \ln(1-x) \leq 2\ln(x+1) \\
&\iff \ln\left[(3-x)\cdot(1-x)\right] \leq \ln\left[(x+1)^2\right] \\
&\iff (3-x)\cdot(1-x) \leq (x+1)^2 \\
&\iff 6x - 2 \geq 0 \\
&\iff 3x - 1 \geq 0 \\
&\iff x \geq \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc : $[\frac{1}{3}; +1[$.

9. Conditions d'existence :

$$8 - x^2 > 0 \text{ et } 5x - 2 > 0$$

Comme

$$8 - x^2 > 0 \iff |x| < \sqrt{8}$$

le domaine d'existence est donc : $]\frac{2}{5}; \sqrt{8}[$.
Transformations de l'équation principale : pour $x \in]\frac{2}{5}; \sqrt{8}[$, nous pouvons écrire les équivalences

$$\begin{aligned}
\log_{16}(8-x^2) - \tfrac{1}{2} \cdot \log_4(5x-2) = \tfrac{1}{4} &\iff \frac{\ln(8-x^2)}{2\ln 4} - \frac{\ln(5x-2)}{2\ln 4} = \frac{1}{4} \quad \Big| \cdot 2\ln 4 \\
&\iff \ln(8-x^2) - \ln(5x-2) = \tfrac{1}{2}\ln 4 \\
&\iff \ln(8-x^2) = \ln 2 + \ln(5x-2) \\
&\iff \ln(8-x^2) = \ln\left[2\cdot(5x-2)\right] \\
&\iff 8 - x^2 = 10x - 4 \\
&\iff x^2 + 10x - 12 = 0
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation auxiliaire $x^2 + 10x - 12 = 0$ sont les réels

$$-5 - \sqrt{37}, \quad -5 + \sqrt{37}$$

Comme

$$\tfrac{2}{5} < -5 + \sqrt{37} < \sqrt{8}$$

l'unique solution de l'équation principale est $-5 + \sqrt{37}$.

10. Condition d'existence :

$$2^x - 1 > 0$$

Le domaine d'existence est donc $]0; +\infty) = \mathbb{R}_0^+$.
Transformations de l'équation principale : pour $x > 0$, on peut écrire (en tâchant de ne pas oublier que $8 = 2^3$)

$$\begin{aligned}
x + 3 \cdot \log_8(2^x - 1) = \log_2 12 &\iff x + \cancel{3} \cdot \frac{\ln(2^x - 1)}{\cancel{3}\ln 2} = \frac{\ln(12)}{\ln 2} \quad \Big| \cdot \ln 2 \\
&\iff x \cdot \ln 2 + \ln(2^x - 1) = \ln(12) \\
&\iff \ln(2^x) + \ln(2^x - 1) = \ln(12) \\
&\iff \ln[2^x \cdot (2^x - 1)] = \ln(12) \\
&\iff 2^x \cdot (2^x - 1) = 12 \\
&\iff (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0
\end{aligned}$$

Le CHV $t = 2^x$ conduit à l'équation auxiliaire

$$t^2 - t - 12 = 0$$

qui admet les solutions 4 et -3.
Nous avons donc, pour 2^x

$$2^x = 4 \iff x = \log_2 4 = 2$$

ou $2^x = -3$, ce qui est manifestement impossible.
L'équation principale admet donc une seule solution, à savoir 2.