1 Logarithmes et exponentielles

1.1 Transformations

Réponse 1

La règle fondamentale qui permet de résoudre ce genre de problèmes est la définition

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

où a et x sont des réels strictement positifs.

1. Comme $\log_5(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{3}\log_5 2$, l'expression s'écrit :
$$\log_5 2 \cdot \log_2 5$$
Sa valeur est donc 1.
2. On a de même
$$\begin{aligned} \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdots \log_{31} 32 &= \log_2 32 \\ &= \log_2(2^5) = 5 \end{aligned}$$
3. On a :
$$p = \frac{\ln 3}{3\ln 2} \qquad q = \frac{\ln 5}{\ln 3}$$
de sorte que
$$3pq = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$
D'où :
$$\begin{aligned} \log_{10} 5 &= \frac{\ln 5}{\ln 5 + \ln 2} \\ &= \frac{\frac{\ln 5}{\ln 2}}{\frac{\ln 5}{\ln 2} + 1} \qquad = \frac{3pq}{3pq+1} \end{aligned}$$

Réponse 2

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x} &= \frac{\ln 3}{\ln x} + \frac{\ln 4}{\ln x} + \frac{\ln 5}{\ln x} \\ &= \frac{\ln 60}{\ln x} \\ &= \frac{1}{\log_{60} x} \end{aligned}$$

Réponse 3

L'information sur p s'écrit

$$p \cdot \log_b a = \log_b(\log_b a)$$

Comme $p \cdot \log_b a = \log_b(a^p)$, on a donc :

$$\log_b(a^p) = \log_b(\log_b a)$$

Mais alors :

$$a^p = \log_b a$$

Réponse 4

Le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \ln \frac{x-2}{x-1}$$

est défini par les conditions

$$x \neq 1 \quad \text{et} \quad \frac{x-2}{x-1} > 0$$

Un tableau des signes montre immédiatement que le domaine est donc $(-\infty; 1[\cup]2; +\infty)$.

Réponse 5

Il suffit d'appliquer le fait que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont des *bijections réciproques* l'une de l'autre (chacune d'elles défait aussitôt ce que l'autre vient de construire) :

$$\ln(\mathrm{e}^{2x}) - \mathrm{e}^{-\ln(x)} = 2x - \frac{1}{x}$$

Réponse 6

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai si $a > 0$ et $b > 0$
4. Faux

Réponse 7

Stéphanie, bonjour ! Cet exercice est un petit rappel sur la notion de *fonction composée* !

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= \ln[g(x)^2] + \sin[g(x)] \\ &= \ln[\mathrm{e}^{4x}] + \sin(\mathrm{e}^{2x}) \\ &= 4x + \sin(\mathrm{e}^{2x}) \\ (g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= \mathrm{e}^{2f(x)} \\ &= \mathrm{e}^{2\ln(x^2)+2\sin x} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(x^4)} \cdot \mathrm{e}^{2\sin x} \\ &= x^4 \cdot \mathrm{e}^{2\sin x} \end{aligned}$$

Donc en général :

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

1.2 Aspects analytiques

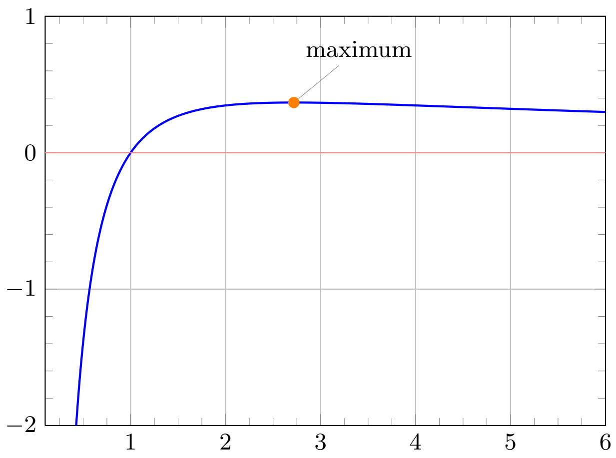
Réponse 8

FI	valeur	méthode	transformation
1. $\frac{\infty}{\infty}$	0	$\widehat{\text{H}}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}$
2. $\frac{\infty}{\infty}$	0	CHV : $x^2+1=t$	
3. $\cancel{\text{FI}}$	$+\infty$		
4. $\infty-\infty$	∞	TD : x	$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$
5. $\infty\cdot 0$	0	Réécriture	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\ln x$
6. $\infty\cdot 0$	0	Réécriture	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+1)-x\ln x$
7. $\infty-\infty$	$-\infty$	TD : x	
8. $\infty-\infty$	∞	TD : x^3	
9. $\frac{\infty}{\infty}$	∞	$\widehat{\text{H}}^2$	
10. $\frac{\infty}{\infty}$	∞	CHV : $x^2=t$; $\widehat{\text{H}}$	
11. $\infty\cdot 0$	0	CHV : $t=-x$; $\widehat{\text{H}}$	
12. $\cancel{\text{FI}}$	$-\infty$		
13. $\infty-\infty$	$-\infty$	TD : e^x	
14. $\cancel{\text{FI}}$	$-\infty$		
15. 0^+ : $\infty\cdot 0$	$+\infty$	CHV : $t=\frac{1}{x}$	
15. 0^- : $\cancel{\text{FI}}$	0		
16. $\cancel{\text{FI}}$	$\pm\infty$		

Réponse 9

1. Étude de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

x	0^+		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0
	AV : $x=0$		MAX		AH : $y=0$



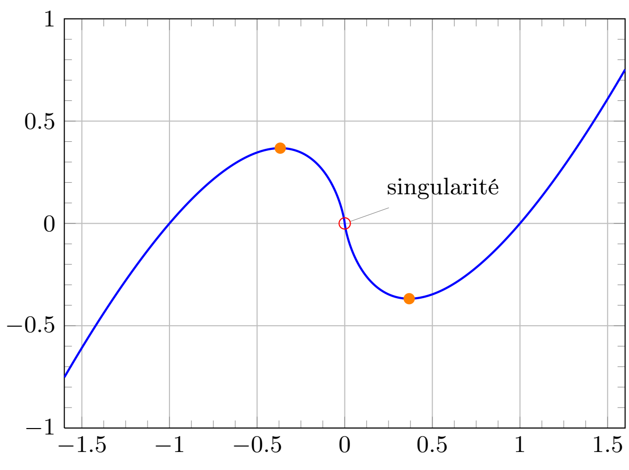
2. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = x \cdot \ln|x|$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\mathrm{e}}$		0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$ || $-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0^+ || 0^-	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$
	BP de DAs : Oy		MAX		singularité		MIN		BP de DAs : Oy

Cette fonction est *impaire* : l'origine est un *centre de symétrie* de Γ_f. Rappelons qu'une fonction est impaire si et seulement si

- le domaine de f est symétrique par rapport à l'origine
- pour tout réel x du domaine : $f(-x) = -f(x)$.

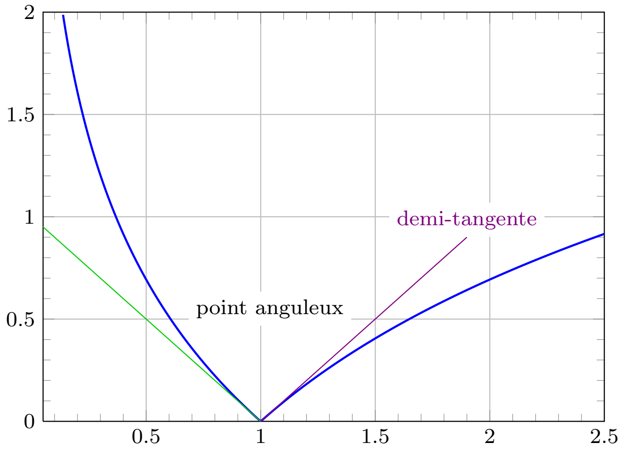
Graphiquement : Γ_f admet l'origine du plan comme centre de symétrie.



Remarquons que la fonction f admet un *prolongement par continuité* en 0 : en *posant* $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction continue en 0.

3. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = |\ln x|$

x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	-1 ‖ $+1$	$+$	
$f(x)$	‖ ∞	↘	0	↗	∞
	AV : $x=0$		MIN, PANG		BP de DAs : Ox

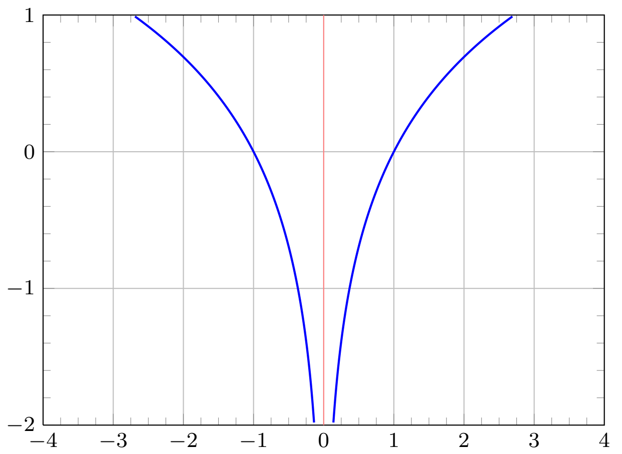


4. Étude de la fonction $f(x) = \ln|x|$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$
	BP de DAs : Ox		AV : $x=0$		BP de DAs : Ox

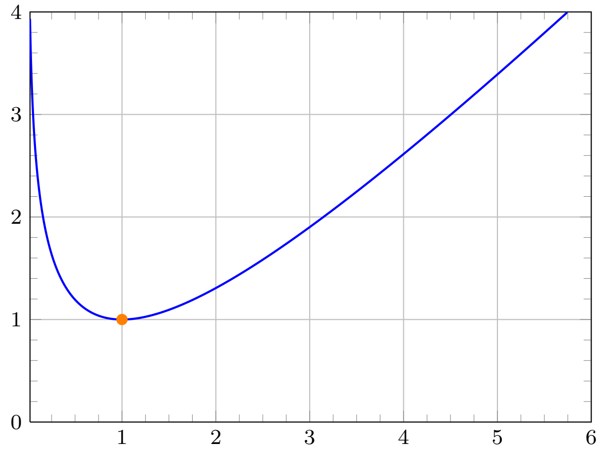
Cette fonction est *paire*. Rappelons qu'une fonction est paire si et seulement si
- le domaine de f est symétrique par rapport à l'origine
- pour tout réel x du domaine : $f(-x) = f(x)$.

Graphiquement : Oy est un axe de symétrie de Γ_f.



5. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = x - \ln x$

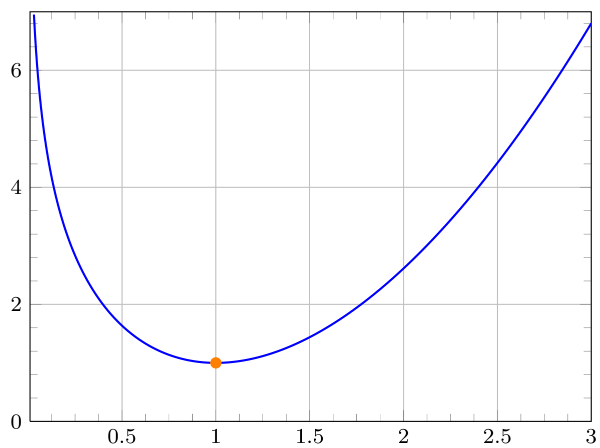
x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	1
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
	AV		MIN		BP de DAs : $y = x$



Nous savons qu'au voisinage de $+\infty$, x domine (est prépondérant sur) $\ln x$; graphiquement, cela se traduit par le fait que Γ_f se dirige *dans la direction de* la droite d'équation $y = x$.
Mais dans la *direction* de cette droite seulement ; comme $\ln x$ devient infiniment grand, on n'aura pas d'asymptote oblique.

6. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2\ln x$

x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	∞
$f(x)$	$\Vert$ ∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞
	AV : Oy		MIN		BP de DAs : Oy

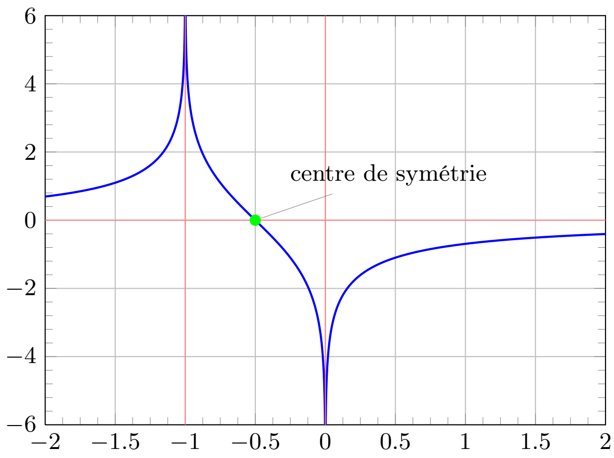


Au voisinage de $+\infty$, c'est bien x^2 qui impose son comportement asymptotique : une branche parabolique dans la direction de Oy.

7. Étude de la fonction $f(x) = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖	↘	‖ $-\infty$	↗	0
	AH : Ox		AV		AV		AH : Ox

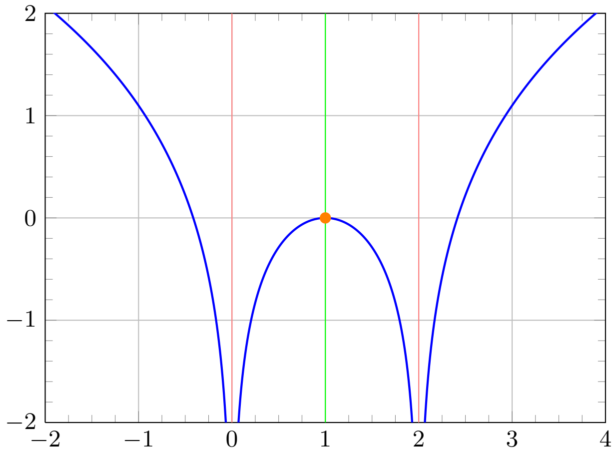
Le point $\Omega(-\frac{1}{2};0)$ est *centre de symétrie* de Γ_f.
Rappelons que $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie de Γ_f si et seulement si
- le domaine de définition de f est *symétrique* par rapport à a
- pour chaque x du domaine : $f(2a-x) = 2b - f(x)$



8. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \ln|x\cdot(x-2)|$

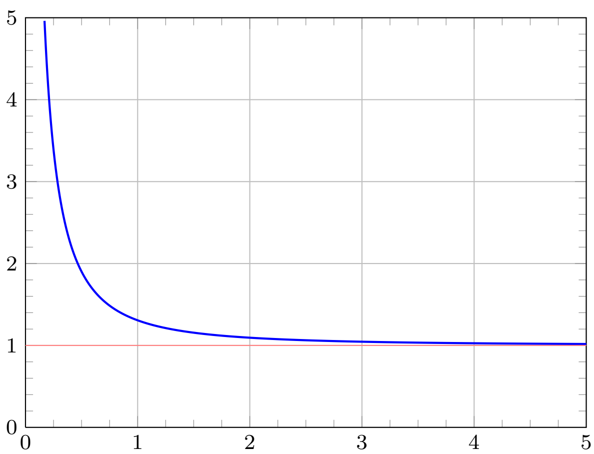
x	$-\infty$		0		1		2		∞
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$	↗	0	↘	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$
	BP de DAs : Ox		AV		MAX		AV		BP de DAs : Ox

Cette fonction admet la droite d'équation $x = 1$ comme *axe de symétrie*.
Rappelons que Γ_f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si et seulement si
- a est centre de symétrie du domaine de f ;
- pour tout x appartenant au domaine, $f(2a-x) = f(x)$.



9. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$

x	0^+		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1
	AV : Oy		AV : $y=1$



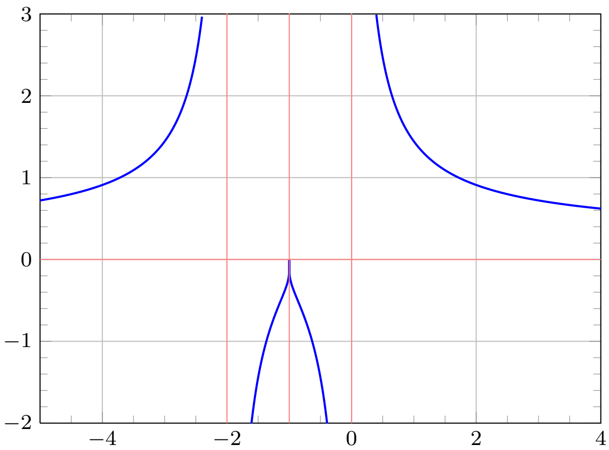
10. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{\ln|x+1|}$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+\infty$ || $+\infty$	$+$	$+\infty$ || $-\infty$	$-$	$-\infty$ || $-\infty$	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0 || 0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0
	AH : Ox		AV : $x=-2$				AV : Oy		AH : Ox

Remarquez que f n'admet *pas* de maximum en -1 puisque f n'est pas définie en -1.
Le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$.

On a, effectivement, pour tout réel x du domaine de définition :

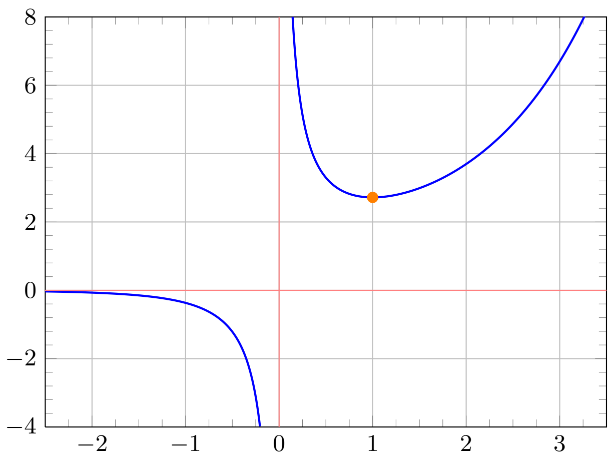
$$\begin{aligned} f(-2-x) &= \ln|(-2-x)+1| \\ &= \ln|-x-1| \\ &= \ln|x+1| \\ &= f(x) \end{aligned}$$



Comme f admet une *limite à gauche* et *à droite* en -1, de valeur 0, f admet un *prolongement par continuité* en ce point en posant : $f(-1) = 0$.
Ce prolongement admet en -1 un *point de rebroussement*.

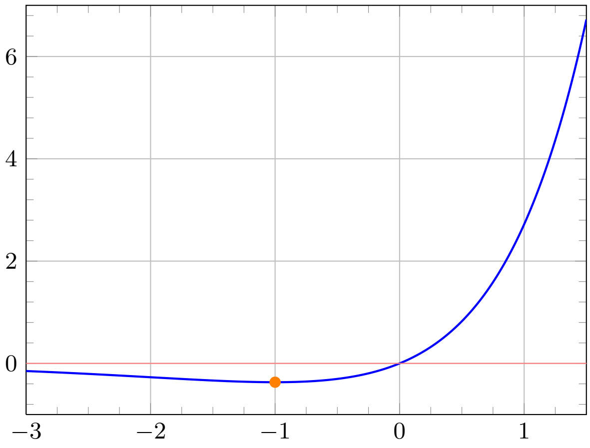
11. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	∞
	AH		AV		MIN		BP



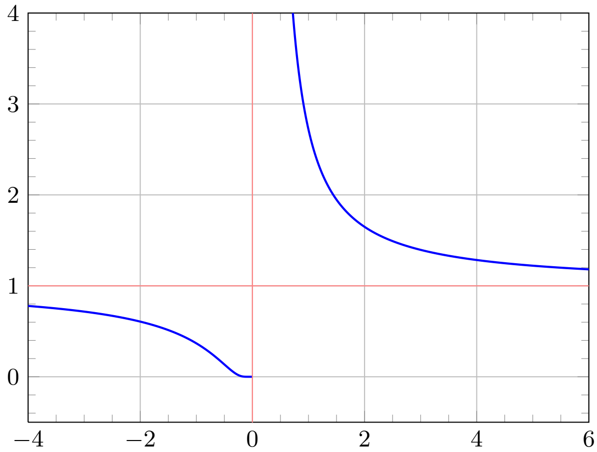
12. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = xe^x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	∞
	AH		MIN		BP de DAs : Oy



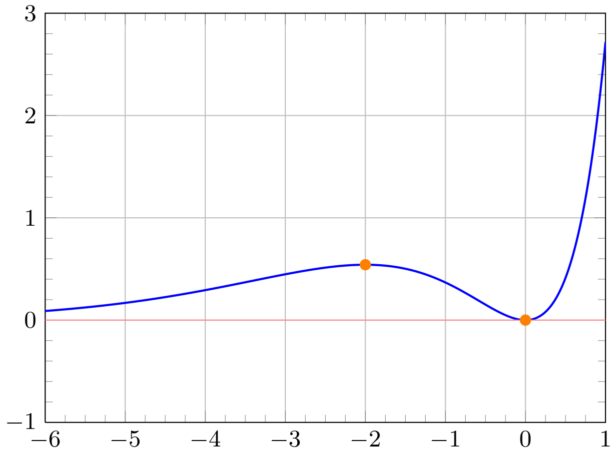
13. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	1
	AH : $y = 1$		AV (à droite)		AH : $y = 1$



14. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$

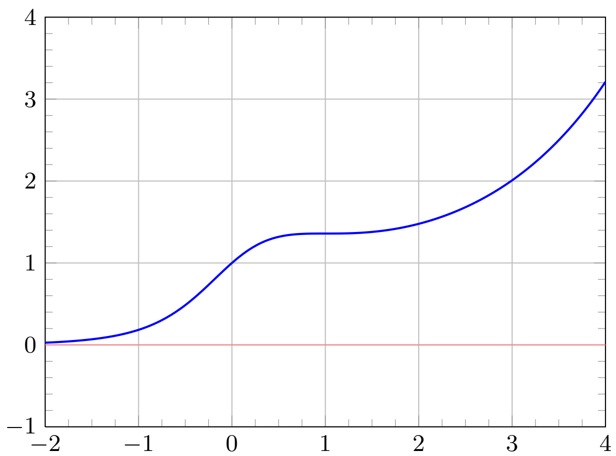
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
	AH : Ox		MAX		MIN		BP de DAs : Oy



15. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$

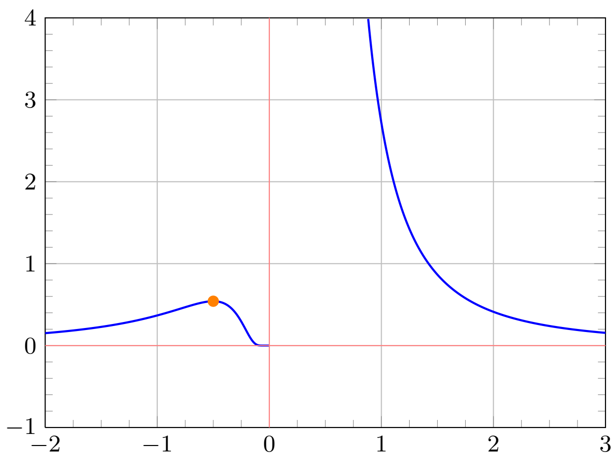
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
	AH : Ox				BP de DAs : Oy

Cette fonction n'admet pas d'extrémum : la condition $f'(x) = 0$ n'est qu'une condition *nécessaire* d'existence d'un extrémum.



16. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
	AH : Ox		MAX		AV		AH



2 Probabilités

Réponse 10

1. Passons par l'événement *contraire* : la probabilité de l'événement « n'obtenir *aucun* 6 en n lancers » est
$$\frac{5^n}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$
D'où la probabilité cherchée : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2. La condition s'écrit :
$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{3}{4} &\iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{4} \\ &\iff \ln\left[\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\right] < \ln\tfrac{1}{4} \\ &\iff n \cdot \ln\tfrac{5}{6} < \ln\tfrac{1}{4} \\ &\iff n > \frac{\ln\frac{1}{4}}{\ln\frac{5}{6}} \quad \left(\text{car } \ln\tfrac{5}{6} < 0\right) \\ &\iff n \geq 8 \end{aligned}$$
Remarquez comment le logarithme naturel a permis de transformer notre inéquation[1].
Vérifions le résultat obtenu :
$$\left(\frac{5}{6}\right)^7 > \frac{1}{4} > \left(\frac{5}{6}\right)^8$$
c'est-à-dire il faut lancer le dé au moins 8 fois.

1. Comme dirait Anissa : « M'sieur, un logarithme est un exposant ! »

Réponse 11

D'après la *formule du binôme de Newton*, le terme général t du développement de
$$\left(2\,x^2 - \frac{1}{8\,x}\right)^{12}$$
est
$$t = \mathbf{C}_{12}^k \cdot (2x^2)^k \cdot \left(-\frac{1}{8x}\right)^{12-k}$$
Transformons cette expression :
$$\begin{aligned} t &= \mathbf{C}_{12}^k \cdot (-1)^k \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^3}\right)^{12-k} \cdot x^{2k-(12-k)} \\ &= \mathbf{C}_{12}^k \cdot (-1)^k \cdot 2^{4k-36} \cdot x^{3k-12} \end{aligned}$$
Or $3k - 12 = 9 \iff k = 7$, de sorte que le coefficient de x^9 est
$$-\mathbf{C}_{12}^7 \cdot 2^{-8} = -\frac{99}{32}$$

Réponse 12

Sujet de l'exercice : distinguer entre arrangements avec ou sans répétitions.

1. Nous construisons avec les 26 lettres et avec les 10 chiffres resp. des arrangements *avec* répétitions :
$$\mathbf{B}_{26}^2 \cdot \mathbf{B}_{10}^3 = 26^2 \cdot 10^3 = 676\,000$$

2. Nous construisons avec les lettres des arrangements *sans* répétitions :

$$\mathbf{A}_{26}^{2} \cdot \mathbf{B}_{10}^{3} = 26 \cdot 25 \cdot 10^{3} = 650\,000$$

3. Nous construisons avec les chiffres des arrangements *sans* répétitions :

$$\mathbf{B}_{26}^{2} \cdot \mathbf{A}_{10}^{3} = 26^{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 486\,720$$

4. Nous construisons avec les 26 lettres et avec les 10 chiffres resp. des arrangements *sans* répétitions :

$$\mathbf{A}_{26}^{2} \cdot \mathbf{A}_{10}^{3} - \mathbf{A}_{26}^{2} \cdot \mathbf{A}_{9}^{2} = \mathbf{A}_{26}^{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 421\,200$$

Réponse 13

Sujet de l'exercice : choix dans un ensemble structuré en deux parties complémentaires (malfaiteurs/bienfaiteurs).
Expérience aléatoire : choix de 7 personnes dans un groupe de 50.
Événement : parmi les 7 il y a 3 malfaiteurs et 4 bienfaiteurs.
Appliquons le schéma d'équiprobabilité du marquis de Laplace en déterminant successivement
- le nombre de cas *possibles* : $\mathbf{C}_{50}^{7}$
- le nombre de cas *favorables* : $\mathbf{C}_{6}^{3} \cdot \mathbf{C}_{44}^{4}$

ce qui donne la probabilité

$$\frac{\mathbf{C}_{6}^{3} \cdot \mathbf{C}_{44}^{4}}{\mathbf{C}_{50}^{7}} = \frac{1\,763}{64\,860} \approx 2{,}7\,\%$$

Réponse 14

- Il s'agit du tirage au hasard d'une carte parmi 32 (tirage, on l'avoue, organisé de manière un peu spéciale). La probabilité est donc : $\frac{4}{32}$.
- *Expérience aléatoire* : produire un arrangement sans répétition de 10 cartes ;
  événement : aucune des neuf premières cartes n'est un as, la dixième carte par contre est un (des quatre) as.
  Dénombrement :
  - nombre de cas *possibles* : $\mathbf{A}_{32}^{10}$
  - nombre de cas *favorables* : $\mathbf{A}_{28}^{9} \cdot 4$

  Probabilité :

$$\frac{\mathbf{A}_{28}^{9} \cdot 4}{\mathbf{A}_{32}^{10}} = \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \ldots \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{4}{23} = \frac{77}{1\,798} \approx 4{,}3\,\%$$

Réponse 15

Sujet de l'exercice : choix structurés.

1. $\mathbf{C}_{16}^{12} = 1\,820 = \mathbf{C}_{16}^{4}$
2. $\mathbf{C}_{3}^{1} \cdot \mathbf{C}_{13}^{11} = 234$ (la structuration étant : les trois premières questions/les 13 autres)
3. $\mathbf{C}_{6}^{4} \cdot \mathbf{C}_{10}^{8} = 675$

Réponse 16

Sujet de l'exercice : combiner choix et arrangements (avec ou sans répétition).

1. – Choix des places pour les consonnes : $\mathbf{C}_{5}^{3}$
   C'est aussi le nombre de choix pour les positions des voyelles car $\mathbf{C}_{5}^{3} = \mathbf{C}_{5}^{2}$
   – Arrangements de 3 consonnes : $\mathbf{A}_{21}^{3}$
   – Arrangements de 2 voyelles : $\mathbf{A}_{5}^{2}$
   D'où $\mathbf{C}_{5}^{3} \cdot \mathbf{A}_{21}^{3} \cdot \mathbf{A}_{5}^{2}$ possibilités.
2. (a) – Nombre de cas favorables : $\mathbf{C}_{5}^{3} \cdot \mathbf{B}_{2}^{3} \cdot \mathbf{B}_{4}^{2}$
   – Nombre de cas possibles : $\mathbf{B}_{6}^{5}$
   D'où la probabilité :

$$\frac{\mathbf{C}_{5}^{3} \cdot \mathbf{B}_{2}^{3} \cdot \mathbf{B}_{4}^{2}}{\mathbf{B}_{6}^{5}} = \mathbf{C}_{5}^{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

   (b) En passant par l'événement contraire, on voit que cette probabilité vaut

$$1 - \left(\frac{4}{6}\right)^{5} \approx 87\,\%$$

3. En étudiant les éventualités réalisant cet événement :

$$\frac{6+5+4+3+2+1}{36} = \frac{21}{36}$$

Réponse 17

Sujet de l'exercice : savoir distinguer choix et arrangements.

1. Un *tiercé* (dans le désordre) correspond à un *choix* de trois chevaux parmi 12 (les 3 qui gagnent) : il y a donc $\mathbf{C}_{12}^{3}$ tiercés différents.
   Un *classement* représente une *permutation* des 12 chevaux : il y en a 12!.
2. $\mathbf{A}_{7}^{3}$
3. $\mathbf{C}_{7}^{3}$
4. $\mathbf{C}_{8}^{3}$
5. Il y a $\mathbf{C}_{20}^{6}$ groupes de 6 soldats et $\mathbf{C}_{19}^{5}$ de tels groupes dont Fabien fait partie.
6. (a) $\mathbf{A}_{9}^{4}$
   (b) $\mathbf{A}_{8}^{3}$
   (c) $\mathbf{A}_{8}^{4}$
7. Si tous les joueurs sont équivalents, il y aura $\mathbf{C}_{20}^{7}$ équipes ; cependant, si, parmi les 20 joueurs, il y en a un génétiquement prédisposé à être gardien de but, il y en aura $\mathbf{C}_{19}^{6}$.
8. $\mathbf{C}_{20}^{4}$
9. (a) $\mathbf{A}_{5}^{3}$
   (b) $\mathbf{A}_{5}^{0} + \mathbf{A}_{5}^{1} + \mathbf{A}_{5}^{2} + \mathbf{A}_{5}^{3} + \mathbf{A}_{5}^{4} + \mathbf{A}_{5}^{5}$