Table des matières

1 Forme algébrique 1
1.1 Opérations 1
1.2 Égalité de nombres complexes 2

2 Interprétation géométrique I 2

3 Équations 2
3.1 Équations du second degré 2
3.2 Équations du troisième degré 2

4 Polynômes 3

5 Forme trigonométrique 3

6 Forme trigonométrique II 4

7 Racines n^es d'un nombre complexe 5

1 Forme algébrique

1.1 Opérations

Exercice 1

Vérifiez les égalités suivantes.

1. $(4+3i)^2 = 7+24i$
2. $(1+i)^2 - (1-i)^2 = 4i$
3. $(2+i)^2 + (1-2i)^2 = 0$
4. $(2+i)(1-2i) = 4-3i$
5. $(4+3i)^3 = -44+117i$
6. $(2+i)^3 + (1-2i)^3 = -9+13i$

Exercice 2

Vérifiez les égalités suivantes.

1. $\dfrac{1}{5+3i} = \frac{1}{34}\cdot(5-3i)$
2. $\dfrac{1+i}{1-i} = i$
3. $\dfrac{3+i}{2-i} + \dfrac{2-i}{3+i} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$
4. $\dfrac{3+2i}{3-2i} = \dfrac{5+12i}{13}$
5. $\dfrac{1+18i}{3+4i} + \dfrac{7-26i}{3-4i} = 8$
6. $\dfrac{i-7}{1+7i} + \dfrac{1-i}{1+i} = 0$

Exercice 3

Vérifiez les égalités suivantes.

1. $\dfrac{(-3+4i)(5-4i)}{3-2i} = \dfrac{-61+98i}{13}$
2. $\dfrac{(4-3i)(2+3i)}{5-3i} = \dfrac{67+81i}{34}$
3. $\dfrac{(1+3i)^3}{1-i} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^2} = -4-20i$
4. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{15} = i^{15} = i^3 = -i$

Exercice 4

Mettez les expressions suivantes sous *forme algébrique* :

1. $(3-5i)+(-2+2i)-(-2+3i)$
2. $\dfrac{4-3i}{2} - \frac{2}{3}\cdot(1-i) - \dfrac{2-i}{6}$
3. $(3+2i)\cdot(4-3i)$
4. $\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{2}i\right)\cdot\left(-\sqrt{3}+\frac{1}{2}i\right)$
5. $(\sqrt{2}+3i)^2$
6. $(-2+i\sqrt{3})^2$
7. $\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}+i\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-i\right)$
8. $(\sqrt{2}-3i)^3 - (\sqrt{2}+i)^3$

Exercice 5

Déterminez, sous *forme algébrique*, l'*inverse* des complexes suivants :

1. i
2. $-2i$
3. $2+i$
4. $4-2i$
5. $1-\frac{1}{2}i$
6. $\sqrt{3}-i\sqrt{2}$
7. $2-i\sqrt{2}$
8. $2-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
9. $a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$

Exercice 6

Déterminez la *forme algébrique* des expressions suivantes :

1. $\left(\dfrac{5-i}{7+i}\right)^2 : \dfrac{2i}{3+i}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{5}+i}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i}\right)^2$

Exercice 7

Calculez la *forme algébrique* des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{3+4i}{-2i}$
2. $\dfrac{3}{2+i}$
3. $\dfrac{4+i}{4-2i}$
4. $\dfrac{i\sqrt{5}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$

Exercice 8

Considérons la fonction φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(z) = \frac{z^2-2z+3}{z^2+2z+3}.$$

Déterminez la *forme algébrique* de $\varphi(3-2i)$.

Exercice 9

Le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ est la *racine cubique de l'unité* : $j^3 = 1$.
Vérifiez alors les égalités suivantes.

1. $1 + j + j^2 = 0$
2. $(1 + j)^3 + \left(1 + j^2\right)^3 = -2$
3. $\dfrac{1 + j}{1 + j^2} = j$
4. $\dfrac{1 + j}{(1 - i)^2} + \dfrac{1 - j}{(1 + i)^2} = i \cdot j$

Exercice 10

1. Calculez les puissances suivantes : i^1, i^2, i^3, ...
2. Calculez, pour tout entier naturel n, les puissances : i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}.
3. Déterminez i^{1789}, $i^{-2\,009}$.

1.2 Égalité de nombres complexes

Exercice 11

Déterminez les *nombres réels* x et y tels que :

1. $(2x - 1) + (1 - y)i = 5 - 3i$
2. $(3x + 2y) - (4x + y)i = 2 - i$
3. $3xi - 2y = 3x + 2 - 4yi - 2i$
4. $xi - y - x + 3i = 0$

2 Interprétation géométrique I

Exercice 12

Représentez dans le plan de *Gauss* le polygone dont les sommets ont comme *affixes*

$$1 + 2i, \quad -2 + i, \quad -1 - 2i, \quad 2 - i$$

1. Est-ce que ces points sont cocycliques ?
2. Déterminez le périmètre de ce quadrilatère.

Exercice 13

Représentez dans le plan de *Gauss* le polygone dont les sommets ont comme *affixes*

1. 10	2. $8 + 10i$	3. $10 + 10i$	4. $10 + 14i$
5. $8 + 14i$	6. $8 + 13i$	7. $6 + 13i$	8. $6 + 14i$
9. $4 + 14i$	10. $4 + 13i$	11. $2 + 13i$	12. $2 + 14i$
13. $14i$	14. $10i$	15. $2 + 10i$	16. 0

Exercice 14

Représentez les parties du plan suivantes :

1. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \textbf{Re}(z) = 1\right\}$
2. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \textbf{Re}(z) \leq 5 \text{ et } 1 \leq \textbf{Im}(z) \leq 3\right\}$
3. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \textbf{Re}(z) \leq 0\right\}$
4. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |\textbf{Im}(z)| \leq 2\right\}$

3 Équations

3.1 Équations du second degré

Exercice 15

Résolvez les *équations* suivantes :

1. $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$
2. $(1 - i)z^2 - 2z - (11 + 3i) = 0$
3. $iz^2 + 3(1 - i)z - 3 - 2i = 0$
4. $z^2 + (5 + i)z + 6 + 3i = 0$
5. $(1 - i)z^2 - 2z - (11 + 3i) = 0$
6. $iz^2 + 3(1 - i)z - 3 - 2i = 0$
7. $z^2 + 2(1 + i)z - 5(1 + 2i) = 0$
8. $2z^2 - (20 + 9i)z + 50 = 0$
9. $iz^2 + (1 - 5i)z + (6i - 2) = 0$
10. $z^2 - (1 - 2i)z + 1 - 7i = 0$
11. $(1 + i)z^2 + (19 + 35i)z - 216 + 216i = 0$
12. $3iz^2 + (11 - i)z - 3 - 6i = 0$

Réponse 15

1. $\{-2\,i, 5 - 12\,i\}$	2. $\{-2 - i, 3 + 2\,i\}$
3. $\{i, 3 + 2\,i\}$	4. $\{-3, -2 - i\}$
5. $\{-2 - i, 3 + 2\,i\}$	6. $\{i, 3 + 2\,i\}$
7. $\{-4 - 3\,i, 2 + i\}$	8. $\{2 - \frac{3\,i}{2}, 8 + 6\,i\}$
9. $\{2, 3 + i\}$	10. $\{-1 - 3\,i, 2 + i\}$
11. $\{-27, -8\,i\}$	12. $\{3\,i, \frac{1}{3} + \frac{2\,i}{3}\}$

3.2 Équations du troisième degré

Exercice 16

Déterminez les *zéros* des polynômes suivants, sachant qu'ils admettent une *racine* du type indiqué :

1. $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i$
   racine $z_0 = 1 - i$
2. $z^3 - (5 + 8i)z^2 + (20i - 11)z + 15 - 12i$
   une racine réelle

3. $z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i$
   une racine imaginaire pure
4. $z^3 + (-4+3i)z + 9 - 13i$
   une racine de partie réelle 1
5. $z^3 - 2(1-3i)z^2 + 2(3+4i)z + 8 + 20i$
   une racine z telle que $\mathbf{Re}\, z = \mathbf{Im}\, z$
6. $3iz^3 + (8-4i)z^2 + (6i-13)z + 9 + 3i$
   une racine de la forme $a - ai$, a réel
7. $z^3 + (6i-13)z^2 + (51-41i)z - 120 + 68i$
   racine de la forme $a + ai$, a réel
8. $2z^3 - 7iz^2 - (9-2i)z + (1+3i)$
   racine imaginaire pure
9. $z^3 + (5i-6)z^2 + (17-32i)z + 42 + 69i$
   racine imaginaire pure
10. $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$
    racine réelle
11. $z^3 + (-1-2i)z^2 + (9i-1)z - 2(1+5i)$
    racine réelle
12. $z^3 + (2-3i)z^2 - 7z + 18 + 21i$
    racine imaginaire pure

Réponse 16

1. $\{2i, 1-i, 1+i\}$
2. $\{3i, 1, 4+5i\}$
3. $\{-2+2i, 2i, 1+i\}$
4. $\{-3+i, 1-2i, 2+i\}$
5. $\{-1-i, 2i, 3-7i\}$
6. $\{3\,i, \frac{1}{3}+\frac{2i}{3}, 1-i\}$
7. $\{2+2i, 4-5i, 7-3i\}$
8. $\{-1+2\,i, \frac{i}{2}, 1+i\}$
9. $\{-3i, 2-5i, 4+3i\}$
10. $\{1, 1-i, 2+2i\}$
11. $\{-2+3i, 1-i, 2\}$
12. $\{-4+i, 3\,i, 2-i\}$

4 Polynômes

Exercice 17

Calculez le *reste* et le *quotient* dans la *division euclidienne* du polynôme $P(z) = 4z^3-(2-i)z^2+iz-i+2$ par le binôme $z+1$.

Exercice 18

Considérons dans $\mathbb{C}$ le polynôme

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7\,.$$

Sachant que P admet les racines i et $-i$, calculez *toutes* les racines de P.
En déduire une *factorisation* du polynôme P en polynômes du premier degré.

Exercice 19

Pour quelle valeur du *paramètre* $m \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^4-2iz^3+(i-m)z+2m$ est-il *divisible* par $z-2i$?

Exercice 20

Considérons le polynôme à *coefficients complexes*

$$P(z) = z^3 + (2\lambda+3i)z^2 + (-4+4\lambda i)z - 4\lambda - 2i$$

où λ est un *paramètre réel.*

1. Montrez que $1-i$ est *racine* de P.
2. Déterminez toutes les racines de P.
3. Factorisez dans $\mathbb{C}$ le polynôme P.
4. Déterminez le réel λ pour qu'au moins une racine soit *imaginaire pure.*

Exercice 21

Soit le polynôme à *coefficients complexes*

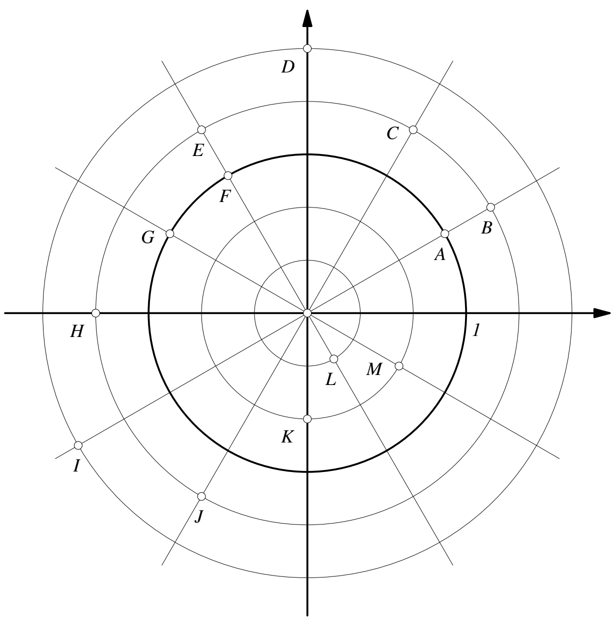
$$P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma\,.$$

1. Déterminez les nombres complexes α, β, γ sachant que :
   - le nombre i est racine de P
   - l'on a : $P(1) = -4i$
   - le reste de la division euclidienne de $P(z)$ par $z+i$ est $-8i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, avec les valeurs de α, β et γ déterminées dans la question précédente.
3. Donnez une factorisation de $P(z)$.

5 Forme trigonométrique

Exercice 22

Déterminez la *forme algébrique* et la *forme trigonométrique* des nombres complexes indiqués.



Exercice 23

Écrivez les nombres complexes suivants sous *forme trigonométrique* :

1. $2+2i$
2. $-2+2i$
3. $-2-2i$
4. $2-2i$
5. 3
6. -3
7. $3i$
8. $-3i$
9. $1+i\sqrt{3}$
10. $-1+i\sqrt{3}$
11. $\sqrt{3}-3i$
12. $-3-i\sqrt{3}$
13. $3+4i$
14. $3-4i$
15. $-3+4i$

Exercice 24

Écrivez les nombres complexes suivants sous *forme algébrique* :

1. $\operatorname{cis} 45^\circ$
2. $2\cdot \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$
3. $3\cdot \operatorname{cis} 210^\circ$
4. $-4\cdot \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$
5. $\operatorname{cis} 45^\circ \cdot \operatorname{cis} 30^\circ$
6. $\dfrac{12 \operatorname{cis} 60^\circ}{4 \operatorname{cis} 15^\circ}$
7. $\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\left(3\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^3$
8. $\dfrac{(2-2i)^5}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4}$
9. $(-3-3i)^7$
10. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\cdot(2-2i)^6$

Exercice 25

Soit le nombre complexe $z=\sqrt{3}-i$.
Calculez le *module* et l'*argument* des nombres complexes

$$z,\quad 2i-z,\quad 2i+z$$

Exercice 26

Considérons les nombres complexes

$$z_1=1-i,\quad z_2=1-i\sqrt{3},\quad z_3=\frac{z_1^5}{z_2^4}.$$

1. Calculez le *module* et l'*argument* de z_1, z_2, z_3.
2. Déterminez les parties *réelle* et *imaginaire* du nombre z_3.
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

6 Forme trigonométrique II

Vérifiez les calculs suivants.

Exercice 27

Calculer le *module* des nombres complexes proposés.

1. $|17+51i| = 17\cdot|1+3i| = 17\sqrt{1^2+3^2} = 17\sqrt{10}$
2. $|(7+35i)\cdot(3+2i)| = 7\cdot|1+5i|\cdot|3+2i| = 91\sqrt{2}$
3. $\left|\dfrac{7-35i}{3-2i}\right| = \dfrac{|7-35i|}{|3-2i|} = \dfrac{7\cdot|1-5i|}{|3-2i|} = 7\sqrt{2}$
4. $\left|\dfrac{(5+3i)(1+i)}{4+i}\right| = \dfrac{|5+3i|\cdot|1+i|}{|4+i|} = 2$

Exercice 28

Écrivez les nombres complexes suivants sous *forme trigonométrique.*

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{1+i} = \sqrt{2}\cdot\dfrac{1-i}{2} = \operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{4}$
2. $\dfrac{1}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{3}$
3. $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^2} = -2+2i = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$
4. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{-\pi}{4}} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{12}$
5. $\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}} = -1+i\sqrt{3} = 2\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$
6. $\dfrac{3+7i}{2-5i} = -1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$
7. $\dfrac{9\sqrt{3}+3i}{2+i\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}-3i = 6\operatorname{cis}-\dfrac{\pi}{6}$
8. $\dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i} = \sqrt{2}+i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}$
9. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^3 = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = (\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3})^3 = 1$
10. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{2004} = (\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{19\pi}{12})^{2004} = -2^{1002}$

Exercice 29

Soit les nombres complexes

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}},\quad z_2=\frac{i}{2i\sqrt{3}-2}.$$

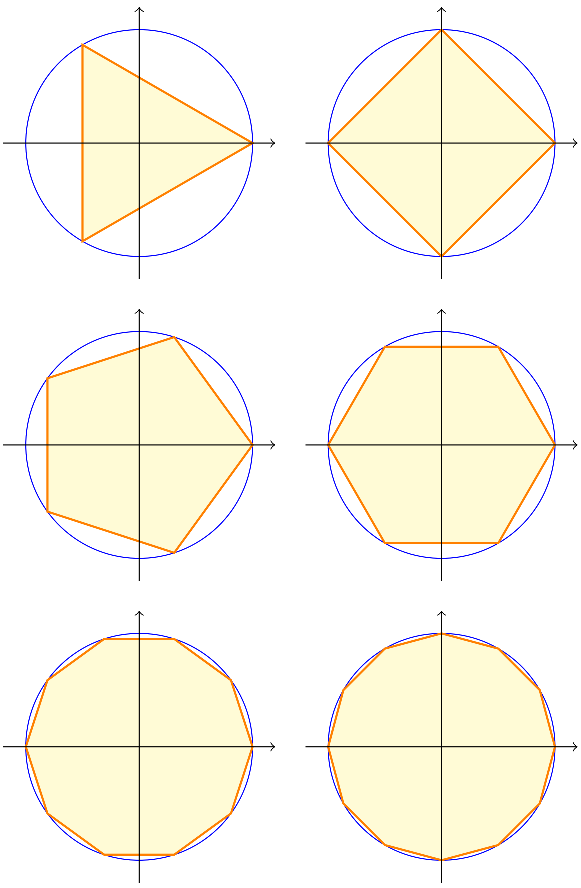
Vérifiez que l'on a :

1. $z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$
2. $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{8} i = \dfrac{1}{4} \operatorname{cis} -\frac{\pi}{6}$
3. $z_1 + z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{2} \right) + i \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{8} \right)$
4. $z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{4} i$
5. $\dfrac{z_1}{z_2} = -2\sqrt{3} + 2i$
6. $z_1^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $z_2^3 = -\frac{1}{64} i$
8. $z_1 + z_1^2 + z_2^3 = -1 - \frac{1}{64} i$
9. $z_1^6 \cdot z_2^{12} = \dfrac{1}{2^{24}}$
10. $\dfrac{z_1^8}{z_2^3} = \dfrac{\left[\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right]^8}{\left[\frac{1}{4} \operatorname{cis} -\frac{\pi}{6}\right]^3} = 2^6 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$

7 Racines n^es d'un nombre complexe

Exercice 30

Déterminez les coordonnées des sommets des *polygones réguliers* suivants :



Exercice 31

Vérifiez de deux manières les relations suivantes (en développant et en calculant les racines carrées) :

1. $(1+i)^2 = 2i$
2. $(1-i)^2 = -2i$
3. $(2+i)^2 = 3+4i$
4. $(2-i)^2 = 3-4i$
5. $(1+2i)^2 = -3+4i$
6. $(1-2i)^3 = -3-4i$
7. $(4+5i)^2 = -9+40i$
8. $(2-3i)^2 = -5-12i$
9. $(i\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 = 10 - 4i\sqrt{6}$
10. $(-7 + i\sqrt{3})^2 = 46 - 14i\sqrt{3}$
11. $\left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{2i}{3}\right)^2 = \dfrac{65}{36} - 2i$
12. $(3+2i)^2 = 5+12i$

Exercice 32

Soit le nombre complexe $z = \sqrt{3} - i$.

1. Calculez les racines carrées du complexe z écrit sous forme *trigonométrique*.
2. Déterminez ces racines carrées de manière *algébrique*.

Exercice 33

Calculez et représentez les racines

1. *cubiques* de i
2. *quatrièmes* de -16
3. *cinquièmes* de $-\sqrt{3} + i$
4. *sixièmes* de $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Exercice 34

Calculez les racines *cubiques* du nombre complexe

$$z = \frac{(2-2i)^4}{(-\sqrt{3}-i)^6(-2i)^8}$$

sous forme algébrique.

Exercice 35

Calculez les racines cinquièmes de $32i$ et représentez dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les racines trouvées.

Exercice 36

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et écrivez les solutions sous forme algébrique :

1. $z^4 + 8\sqrt{2} = 8i\sqrt{2}$ **2.** $z^6 - z^3 + 1 = 0$

Exercice 37

Considérons les nombres complexes

$$a = \sqrt{3} - i, \qquad b = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$$

1. Déterminez la *forme trigonométrique* de a.
2. Déterminez la *forme algébrique* et la *forme trigonométrique* de $a \cdot b$.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Réponse 37

1. Forme trigonométrique de a :

$$a = \sqrt{3} - i = 2 \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Forme algébrique de b :

$$b = 1 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2. Dans le monde algébrique :

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{3} - i) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

Dans le monde trigonométrique :

$$\begin{aligned} ab &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot 1 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

3. En comparant les parties réelles d'une part, les parties imaginaires d'autre part :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 38

Soit $a = 1 + i$.

1. Déterminez les racines carrées de a sous *forme algébrique* et *trigonométrique*.
2. En déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Réponse 38

1. Calculons la racine carrée de $1 + i$ sous forme algébrique en résolvant le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{2} \\ 2xy &= 1 \end{cases}$$

Ce système admet les deux solutions z_0 et z_1 :

$$z_0 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}$$

Trigonométriquement, on a évidemment :

$$z_0 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

2. En comparant les parties réelles d'une part, les parties imaginaires d'autre part :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 39

Soit le nombre complexe

$$z = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} - i \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

1. Calculez z^4 sous *forme algébrique* et sous *forme trigonométrique*.
2. En déduire la *forme trigonométrique* de z.
3. Déterminez la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

Réponse 39

1. On a :

$$z^2 = -4\sqrt{2} \cdot (1 + i), \quad z^4 = 64 \cdot i$$

La forme trigonométrique de z^4 est donc

$$z^4 = 64 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

2. $z = r \cdot \operatorname{cis}(\theta)$ est une racine quatrième du nombre $64 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

Or z est situé dans le quatrième quadrant :

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8} + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

3. En comparant les formes trigonométrique et algébrique de z, on trouve :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{13\pi}{8} &= \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \\ 2\sqrt{2} \cdot \sin\frac{13\pi}{8} &= -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Or $\cos\frac{13\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{13\pi}{8} = -\cos\frac{\pi}{8}$ D'où finalement :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 40

1. Calculez le nombre complexe

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$$

2. On donne l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}\cdot(-1+i)$$

Calculer les racines de cette équation

(a) sous *forme algébrique*

(b) sous *forme trigonométrique*

3. En déduire $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Réponse 40

1. On a : $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3 = -4\sqrt{2}+i\,4\sqrt{2}$
2. z est donc *une* solution de l'équation proposée. La forme algébrique des solutions est alors :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}+i\sqrt{2}\\ z\cdot j &= (\sqrt{2}+i\sqrt{2})\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\\ z\cdot j^2 &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

où $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine primitive cubique de l'unité.
Leurs formes trigonométriques correspondantes sont :

$$\begin{aligned} z &= 2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ z\cdot j &= 2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)\\ z\cdot j^2 &= 2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

En comparant les parties réelles et imaginaires :

$$2\cdot\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 41

Soit z et z' les nombres complexes définis par

$$z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad\text{et}\quad z' = 1-i\,.$$

1. Mettre sous *forme trigonométrique* z, z' et leur quotient $w=\dfrac{z}{z'}$.
2. En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Réponse 41

1. On a :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\right) &&= \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ z' &= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right) &&= \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \frac{z}{z'} &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot i &&= 1\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

2. En comparant les parties réelles d'une part, les parties imaginaires d'autre part :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 42

On donne les deux nombres complexes

$$z_1 = 1+i\sqrt{3} \quad\text{et}\quad z_2 = \frac{7i-1}{4+3i}-\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 .$$

1. Mettre z_1 et z_2 sous *forme algébrique* et sous *forme trigonométrique.*
2. En calculant de deux façons différentes $z=\frac{z_1}{z_2}$ déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Réponse 42

On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1+\sqrt{3}\cdot i &&= 2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ z_2 &= 1+i &&= \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot i &&= \sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

En comparant de cette dernière expression les parties réelles d'une part, les parties imaginaires d'autre part :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 43

Soient les nombres complexes

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{2}i}{-1-2i}-\frac{4\sqrt{6}(1+2i)}{3i-1} \quad\text{et}\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}.$$

1. Déterminez z_1 sous *forme algébrique.*
2. Écrire z_2 sous *forme trigonométrique.*
3. Déterminer $\alpha = z_1^2$ sous *forme algébrique* et sous *forme trigonométrique.*
4. Calculer $\beta = \dfrac{\alpha}{z_2}$ sous *forme trigonométrique.*
5. Déterminer les racines cubiques de β sous *forme trigonométrique.*

6. Vérifier que $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ est une racine cubique de β.
7. En utilisant les racines cubiques de l'unité, déterminer les racines cubiques de β sous *forme algébrique*.
8. En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Réponse 43

1. $z_1 = 2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{6}\right)\cdot i$
2. $$z_2 = \frac{2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$
3. $$\alpha = z_1^2 = -32\sqrt{3}-32\cdot i = 64\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$
4. $$\beta = \frac{\alpha}{z_2} = -32\sqrt{2}-32\sqrt{2}\cdot i = 64\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$
5. Les racines cubiques de β :
$$4\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right),\ 4\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right),\ 4\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)$$
6. $(2\sqrt{2})^3\cdot(1-i)^3 = -32\sqrt{2}-32\sqrt{2}\cdot i = \beta$
7. Les racines cubiques de β sont :
$$z_0 = 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot i$$
$$z_0\cdot j = \sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot i$$
$$z_0\cdot j^2 = -\sqrt{6}-\sqrt{2}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot i$$
8. Remarquons que
$$z_0 = 4\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$
$$z_0\cdot j = 4\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$z_0\cdot j^2 = 4\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$
j étant notre racine cubique de l'unité.
9. Or $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$ sont supplémentaires :
$$\cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\frac{5\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 44

On donne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}-6i}{2(\sqrt{3}-i)} \quad\text{et}\quad z_2 = \frac{(i-1)(15-10\sqrt{2}i)}{3\sqrt{2}-4i}.$$

1. Mettre z_1 et z_2 sous f*ormes algébrique* et *trigonométrique*.
2. On pose : $u = \dfrac{z_1^2}{z_2}$.
   (a) Mettre u sous *formes algébrique* et *trigonométrique*.
   (b) En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{11\pi}{12}$.

Réponse 44

1. Formes algébriques et trigonométriques :
$$z_1 = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i = \sqrt{3}\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$z_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot i = 5\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
2. En effectuant les calculs d'abord dans le monde algébrique ensuite dans le monde trigonométrique :
$$\frac{z_1^2}{z_2} = -\frac{3\sqrt{6}}{20}-\frac{3\sqrt{2}}{20}+\left(\frac{3\sqrt{6}}{20}-\frac{3\sqrt{2}}{20}\right)\cdot i$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$
Mézalor :
$$\tan\tfrac{11\pi}{12} = \frac{\mathbf{Im}\,u}{\mathbf{Re}\,u} = \sqrt{3}-2$$

Exercice 45

On donne les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{(-1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2-2i}, \qquad z_2 = -\frac{3\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-2i}.$$

1. Mettre les deux nombres sous leur *forme algébrique* ainsi que sous leur *forme trigonométrique*.
2. Calculer $z_1\cdot z_2$ à l'aide des *formes algébriques*, puis à l'aide des *formes trigonométriques*.
3. En déduire $\cos\frac{23\pi}{12}$ et $\sin\frac{23\pi}{12}$.

Réponse 45

1. Formes algébriques et trigonométriques :
$$z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i = 1\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i = 2\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$
2. Formes algébrique et trigonométrique de $z_1\cdot z_2$:
$$z_1\cdot z_2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\cdot i$$
$$= 2\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$
3. En comparant les parties réelles et imaginaires :
$$\cos\frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Exercice 46

On donne les nombres complexes

$$z_1 = \frac{-1+13i}{1-i} - \frac{11-17i}{i-3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-6+10\sqrt{3}i}{i-3\sqrt{3}}.$$

1. Écrire ces deux nombres sous *formes algébrique* et *trigonométrique*.
2. Calculer $w = z_1 \cdot z_2$ de deux façons différentes et en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Réponse 46

1. Formes algébriques et trigonométriques :

$$\begin{aligned} z_1 &= -2+2\cdot i = 2\sqrt{2}\cdot \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ z_2 &= \sqrt{3}-3\cdot i = 2\sqrt{3}\cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

2. Formes algébrique et trigonométrique de $z_1 \cdot z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 6-2\sqrt{3}+(6+2\sqrt{3})\cdot i \\ &= 4\sqrt{6}\cdot \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

3. En comparant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} \cos \tfrac{5\pi}{12} &= \frac{6-2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin \tfrac{5\pi}{12} &= \frac{6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$