

## Table des matières

<b>1 Exercices d'introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Plans</b>	<b>1</b>
2.1 Représentations cartésienne et paramétrique . . . . .	1
2.2 Problèmes inverses . . . . .	1
<b>3 Droites</b>	<b>2</b>
3.1 Représentations cartésienne et paramétrique . . . . .	2
3.2 Problèmes inverses . . . . .	2
<b>4 Intersections</b>	<b>2</b>
4.1 Droite — Plan . . . . .	2
4.2 Droite — Droite . . . . .	3
4.3 Plan — Plan . . . . .	3
<b>5 Parallélisme</b>	<b>3</b>
5.1 Plan — Plan . . . . .	3
5.2 Droite — Droite . . . . .	3
5.3 Plan — Droite . . . . .	3
<b>6 Orthogonalité</b>	<b>4</b>
<b>7 Interprétation géométrique de systèmes linéaires</b>	<b>4</b>
<b>8 Paramètres</b>	<b>4</b>

## 1 Exercices d'introduction

## Exercice 1

Dans un repère de l'espace, on donne les points

$$A(3; 2; -1), \quad B(1; -2; 1).$$

1. Est-ce que les points  $A$ ,  $B$  et  $C(-4; -12; 6)$  sont alignés?
2. Est-ce que  $D(6; 8; -3) \in AB$ ?
3. Calculez l'ordonnée et la cote du point  $D' \in AB$  dont l'abscisse est 6.

## Exercice 2

Dans un repère de l'espace, on donne les points

$$A(3; -1; 2), \quad B(1; 2; -3), \quad C(0; 3; -1).$$

1. Est-ce que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont alignés?
2. Est-ce que le point  $D(4; -5; 27)$  appartient au plan  $ABC$ ?
3. Est-ce que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $E(-7; 10; 14)$  sont coplanaires?
4. Déterminez la cote du point  $E'$  de  $ABC$  dont l'abscisse est  $-7$  et l'ordonnée 10.

## 2 Plans

## 2.1 Représentations cartésienne et paramétrique

## Exercice 3

Écrivez

- une équation cartésienne
  - un système d'équations paramétriques
- du plan  $\Pi$  passant par le point  $M(-2; 3; 1)$  et dont un vecteur normal  $\vec{v}$  a pour composantes  $(1, 2, -2)$ .

## Exercice 4

Déterminez

- un système d'équations paramétriques
  - et une équation cartésienne
- du plan  $\Pi$  comprenant le point  $A(-3; 1; 2)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}(1; -2; 3)$  et  $\vec{v}(-1; 2; 3)$ .

## Exercice 5

Déterminez

- un système d'équations paramétriques
  - et une équation cartésienne
- du plan passant par les points  $M(1; 2; -3)$ ,  $N(3; -2; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{v}(1; 2; -3)$ .

## Exercice 6

Déterminez

- un système d'équations paramétriques
  - et une équation cartésienne
- du plan passant par les points  $M(1; 2; -3)$ ,  $N(3; -2; 1)$  et  $P(1; 1; -2)$ .

## 2.2 Problèmes inverses

## Exercice 7

Le plan  $\Pi$  a pour équation cartésienne

$$5x - 3y + 2z - 7 = 0$$

1. Déterminez un vecteur normal de  $\Pi$ .
2. Est-ce que  $\vec{k}(-15; 9; -6)$  est un vecteur normal de  $\Pi$ ?
3. Déterminez les coordonnées d'un point de  $\Pi$ .
4. Est-ce que  $A(-3; 4; 17) \in \Pi$ ?
5. Déterminez deux vecteurs directeurs de  $\Pi$ .
6. Est-ce que  $\vec{w}(13; -3; -37)$  est un vecteur directeur de  $\Pi$ ?
7. Déterminez des équations paramétriques de  $\Pi$ .

## Exercice 8

Un système d'équations paramétriques de  $\Pi$  est

$$\begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = -2\alpha - \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta - 2 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- Déterminez un point de  $\Pi$ .
- Est-ce que  $M(8;6;-10) \in \Pi$ ?
- Déterminez deux vecteurs directeurs de  $\Pi$ .
- Est-ce que  $\vec{w}(-8;-7;8)$  est un vecteur directeur de  $\Pi$ ?
- Déterminez une équation cartésienne de  $\Pi$ .
- Déterminez un vecteur normal de  $\Pi$ .
- Est-ce que  $\vec{k}(-1;-1;1)$  est un vecteur normal de  $\Pi$ ?

### 3 Droites

#### 3.1 Représentations cartésienne et paramétrique

##### Exercice 9

Déterminez

- un système d'équations paramétriques
- un système d'équations cartésiennes

- de la droite passant par  $A(1;2;-3)$  et de vecteur directeur  $\vec{v}(3;-1;2)$ ;
- de la droite passant par  $A(2;1;-3)$  et  $B(2;1;5)$ .

##### Exercice 10

Déterminez des équations cartésiennes et des équations paramétriques de la droite  $d$

- passant par les points  $A(1;5;2)$  et  $B(3;1;1)$ ;
- passant par le point  $A(1;-2;3)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2;0;3)$ .

#### 3.2 Problèmes inverses

##### Exercice 11

La droite  $d$  a pour système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 2\alpha + 3 \\ z = -\alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Déterminez deux points de  $d$ .
- Déterminez un vecteur directeur de  $d$ .
- Déterminez des équations cartésiennes de  $d$ .

##### Exercice 12

La droite  $d$  a pour équations cartésiennes

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

- Déterminez le point de  $d$  de cote 5.
- Déterminez le point de  $d$  d'ordonnée 5.
- Déterminez le point de  $d$  d'abscisse 5.

- Déterminez un vecteur directeur de  $d$ .

##### Exercice 13

La droite  $d$  a pour équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$$

- Déterminez le point de  $d$  de cote  $y$  (où  $y \in \mathbb{R}$ ).
- Déterminez des équations paramétriques de  $d$ .

##### Exercice 14

La droite  $d$  a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x = k - 2 \\ y = 3k + 4 \\ z = 2k - 3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Déterminez des équations cartésiennes de  $d$ .

### 4 Intersections

#### 4.1 Droite — Plan

##### Exercice 15

Quelle est l'intersection de la droite  $d$  définie par

$$d \equiv \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3t + 4 \\ z = 2t - 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et du plan  $\Pi \equiv x + y + z = 5$ ?

##### Exercice 16

Déterminez l'intersection de la droite  $d$

$$d \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ -y - 3z = 1 \end{cases}$$

et du plan  $\Pi$

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = -2\alpha - \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta - 2 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

##### Exercice 17

On donne

$$d \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$$

et

$$\Pi \equiv x - y + z = 5$$

- La droite  $d$  perce-t-elle le plan  $\Pi$ ?

- Si oui, déterminez les coordonnées du point de percée.

### Exercice 18

Déterminez l'intersection de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha - 1 \\ x_2 = 2\alpha + 3 \\ x_3 = -\alpha \end{cases}$$

et du plan

$$\Pi \equiv \begin{cases} x_1 = \beta + \gamma - 1 \\ x_2 = 3\beta + 2 \\ x_3 = -\beta - \gamma - 3 \end{cases}$$

## 4.2 Droite — Droite

### Exercice 19

Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha + 1 \\ x_2 = -2\alpha - 3 \\ x_3 = 3\alpha \end{cases} \quad d' \equiv \begin{cases} x_1 = 3\beta - 1 \\ x_2 = -\beta - 4 \\ x_3 = \beta + 2 \end{cases}$$

### Exercice 20

Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x + y + 6 = 0 \end{cases} \quad d' \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 2k \\ z = 2 \end{cases}$$

### Exercice 21

Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \quad d' \equiv \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = z - 3 \end{cases}$$

## 4.3 Plan — Plan

### Exercice 22

Déterminez l'intersection du plan  $\alpha$  passant par  $A(1;0;3)$ ,  $B(5;0;6)$  et  $C(0;0;0)$  avec le plan  $\beta$  qui comprend  $M(0;4;5)$ ,  $N(1;9;10)$  et  $P(-5;-2;-1)$ .

## 5 Parallélisme

### 5.1 Plan — Plan

#### Exercice 23

Déterminez une équation cartésienne du plan  $\Pi$  passant par  $P(2;3;-1)$  et parallèle à

$$\Pi' \equiv 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 4 = 0$$

#### Exercice 24

Déterminez une équation cartésienne du plan  $\Pi$  passant par le point  $P(3;-1;2)$  et parallèle au plan  $\Pi'$  qui passe par les points  $A(2;1;-3)$ ,  $B(1;2;-4)$  et  $C(1;0;1)$ .

#### Exercice 25

Déterminez une équation cartésienne du plan  $\Pi'$  contenant le point  $P(1;0;-1)$  et parallèle au plan

$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

## 5.2 Droite — Droite

### Exercice 26

Vérifiez si les droites  $d$  et  $d'$  sont parallèles :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = -k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases} \quad d' \equiv \begin{cases} x = -\frac{6}{7}k - 1 \\ y = \frac{3}{7}k \\ z = \frac{9}{7}k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

### Exercice 27

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite  $d$  parallèle à la droite

$$d' \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda - 1 \\ x_2 = 2\lambda + 2 \\ x_3 = -\lambda + 3 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

et passant par le point  $P(3;-1;4)$ .

### Exercice 28

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite  $d$  parallèle à la droite

$$d' \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

et passant par le point  $P(1;0;-1)$ .

## 5.3 Plan — Droite

### Exercice 29

Déterminez une équation cartésienne du plan  $\Pi$  passant par le point  $M(1;-2;3)$  et contenant la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = y - 3 \\ y = -y + 2 \\ z = 2y - 1 \end{cases} \quad (y \in \mathbb{R})$$

**Exercice 30**

Discutez, en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{R}$ , la position de la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = m \cdot \alpha + 3 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = -\alpha + m \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

et du plan

$$\Pi \equiv 3x - 2y + 5z - 1 = 0$$

**6 Orthogonalité****Exercice 31**

Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite  $d$  orthogonale au plan

$$\pi \equiv 2x - 3y + 5z = 0$$

passant par le point  $P(2; 1; -1)$ .

**Exercice 32**

Déterminez une équation cartésienne du plan  $\Pi$  orthogonal à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = 2\lambda - 8 \\ y = 3\lambda \\ z = 5\lambda - 2 \end{cases}$$

et passant par  $P(2; 3; -1)$ .

**7 Interprétation géométrique de systèmes linéaires****Exercice 33**

Résolvez et interprétez géométriquement les systèmes (leurs ensembles de solutions) suivants.

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 3x - 2z = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + 3y = 4 \\ 2x + 4y - z = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \\ -3x + 6y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 + 3x_3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 - x_3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ -4x - 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

**Exercice 34**

Distinguez, parmi les systèmes suivants, ceux qui sont cramériens.

$$1. \begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{y+5}{4} = -2 \\ \frac{2x-5}{3} - \frac{y-2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3y - z + 5 = 0 \\ 2x + 3z = -4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 6y + 3z = 3 \\ -\frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**8 Paramètres****Exercice 35**

Résolvez, discutez et interprétez géométriquement suivant les valeurs attribuées aux paramètres  $a$ ,  $b$  et  $m$  les systèmes suivants.

$$1. \begin{cases} (m+1)x - 2y = 4 \\ (m-1)x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + (a-2)x_2 - a = 0 \\ 4x_1 + ax_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} ax + 3y - az = 1 \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + mx_2 + x_3 = 2m \\ mx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + mx_2 + (m+1)x_3 = m \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 + a^2x_2 + a^3x_3 = a \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} u + v + w = 0 \\ 2u + 2av + aw = 0 \\ 3u + (a+2)v + (a+1)w = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} ax_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = a \\ 2x_1 + ax_2 = 1 \end{cases}$$

### Exercice 36

Déterminez les valeurs du paramètre  $a$  pour que les systèmes suivants aient

- une seule solution
- aucune solution
- plus d'une solution

$$1. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + ay - z = 1 \\ -x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x - ay = 3 \\ 2x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$