Exercice 1

Le diamètre d'un certain type d'épicéa a été étudié sur une période de quelque 200 ans.
Voyez dans ce contexte le tableau des différentes mesures prises :

Années*	0	25	50	75	100
Diamètre	0,05	0,15	0,41	0,76	1,07

Années	125	150	175	200
Diamètre	1,19	1,23	1,24	1,25

(*) Nombre d'années écoulées depuis le début des mesures.

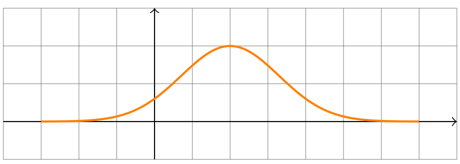
1. Placez les données dans un repère approprié. Quelle épaisseur maximale atteindra probablement l'épicéa ?
2. Jugez de la qualité du modèle basée sur la *croissance exponentielle* suivante :

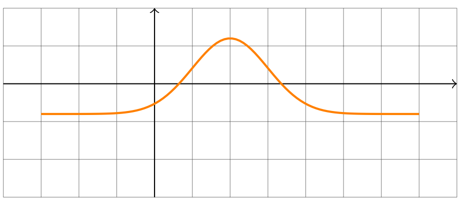
$$f(t) = 0,05 \cdot 2,73^{\frac{t}{25}}$$

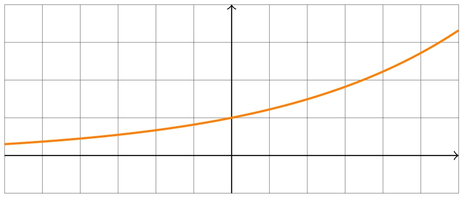
   $f(t)$ indique le diamètre (en mètres) à l'instant t (en années ; l'année du début des mesures correspond à $t = 0$).
3. On donne maintenant la fonction définie par :

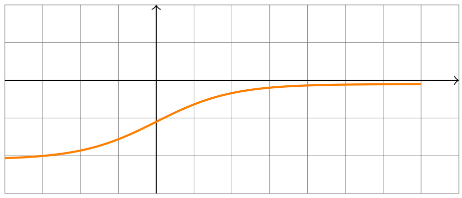
$$g(t) = \frac{5}{100 \cdot \mathbf{e}^{-\frac{t}{20}} + 4}$$

   (*croissance logistique*).
   (a) Jugez de ce modèle en général en tenant compte des données mesurées.
   (b) À quel moment l'arbre avait-il une épaisseur de 1 m ?
   (c) Quand la vitesse de croissance a-t-elle été maximale et quelle était alors sa valeur ?
4. Lequel des quatre graphes ci-après correspond à la fonction g' ? Justifiez la réponse sans représenter g'. Expliquez aussi pourquoi les autres graphes ne peuvent pas convenir !









Exercice 2

La croissance de la population mondiale constitue pour l'humanité un problème non négligeable. Elle dépend de facteurs multiples tels le nombre actuel d'habitants de la Terre, l'environnement, la disponibilité des ressources nécessaires etc.
En octobre 1999, déjà plus de six milliards de gens peuplaient notre planète et l'on sait que, depuis, ce nombre faramineux ne cesse de croître. Il est évident qu'à long terme la terre encaissera très mal une telle explosion démographique.
Examinons donc dans ce contexte le tableau résumant le pronostic avancé par l'ONU en 1990 (en milliards d'individus) :

1960	1990	2000	2025	2050	2100	2150
3,02	5,3	6,23	8,15	9,75	1,,04	11,54

Après 2200, la population est stable au niveau de 11,6 milliards d'individus.
Nous essayerons par la suite de dégager le modèle mathématique qui a permis de faire ce pronostic.

1. Voici trois fonctions représentant chacune un type de croissance différent :
   - *croissance linéaire* :

$$y(t) = 0,093 \cdot t + 5,2$$

   - *croissance exponentielle* :

$$y(t) = 5,3 \cdot \mathbf{e}^{0,016 \cdot t}$$

   - *croissance parabolique* :

$$y(t) = \sqrt{1,072 \cdot t + 28,09}$$

   où $y(t)$ indique la population (en milliards) à l'instant t (en années). L'année 1990 correspond à $t = 0$, l'année 1991 à $t = 1$ etc.
   (a) Représentez les graphes des trois fonctions pour la période de 1960 à 2150.

(b) À l'aide de deux arguments différents, expliquez pourquoi aucune de ces fonctions ne peut être à la base du pronostic de l'ONU.

(c) Sur la même figure, représentez les données obtenues par l'ONU. Jugez de la qualité de chacun de ces modèles.

2. On donne maintenant la fonction définie par :

$$y(t) = \frac{a}{1 + b \cdot \mathbf{e}^{-\alpha t}}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ (*croissance logistique*).

(a) Déterminez a, sachant que cette fonction est à la base du pronostic de l'ONU pour les années après 200.

(b) Déterminez ensuite b et α sur base des données des années 1960 et 1990.

3. On suppose que l'ONU s'est basée sur la fonction suivante pour établir son pronostic :

$$y(t) = \frac{11,6}{1 + 1,1887 \cdot \mathbf{e}^{-0,029 \cdot t}}$$

(a) En traçant le graphe de cette fonction, juger si elle est bien à la base du pronostic de l'ONU.

(b) Déterminez les asymptotes, extrémas et points d'inflexion de cette fonction.

(c) Pour quelles périodes (en années) ce modèle donne-t-il un accroissement annuel de la population inférieur à $0,05$ milliards ? Justifiez votre réponse.

(d) Sur la base de ce modèle, calculez la moyenne de la population mondiale entre 1990 et 2150.

(e) Que représente le point d'inflexion de cette fonction dans le contexte de la croissance démographique mondiale ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3

La drosophile (du latin *droso* : la rosée et *philus* : qui aime) est un insecte appelé mouche du vinaigre ou mouche des fruits. La drosophile se reconnaît à son corps brun, d'un à deux millimètres. On trouve des drosophiles presque partout sur Terre. Souvent visibles toute l'année, elles sont parfois très communes, voire importunes (dans les fabriques de jus de fruits ou de confitures, elles peuvent tomber dans les récipients et transmettre des microorganismes). Elles sont attirées par les fruits, où elles pondent leurs oeufs et où leurs larves se développent. Elle doit sa célébrité à sa facilité d'élevage, qui en a fait une espèce modèle dans la recherche génétique.

Au début des mesures (jour 0) le population est de 200 drosophiles. Le lendemain on compte déjà 240 drosophiles.

1. On suppose que la multiplication des drosophiles suit la loi d'une *croissance exponentielle* :

$$f(t) = \alpha \cdot \mathbf{e}^{\beta \cdot t}$$

où t désigne le temps écoulé en jours et $f(t)$ la population au jour t. Déterminez les *paramètres* réels α et β. Donnez une valeur de β à 10^{-3} près.

2. À partir de quel jour la population dépasse-t-elle les 3 000 drosophiles ?

3. Représentez graphiquement la fonction f dans un repère bien choisi.

4. Vu que l'espace de vie, ainsi que la quantité de nourriture sont *limités*, on admet que la population atteindra *au plus* les 3 500 drosophiles. Jugez de la *qualité du modèle exponentiel*.

5. On admettra que la multiplication des drosophiles est plutôt caractérisée par une fonction du type *croissance logistique*

$$g(t) = \frac{A}{1 + B \cdot \mathbf{e}^{-kt}}$$

où A, B et k sont des paramètres réels et $k > 0$ Sachant que g vérifie les mêmes *conditions initiales* que f, utilisez les données de 4) pour déterminer les valeurs de A, B et k. Donnez une valeur de k à 10^{-4} près.

Désormais on se limitera au modèle de la croissance logistique.

6. Représentez graphiquement la fonction g dans le repère sous 3).

7. À partir de quel jour la population dépasse-t-elle les 3 000 drosophiles ?

8. Quand l'accroissement de la population est-il maximal ? Expliquez le raisonnement à l'aide d'un tableau de variations.

Exercice 4

1. Si on mesure la hauteur d'un tournesol tout au long de sa croissance, on obtient à peu près la courbe suivante :

Au début des mesures (jour 0) la hauteur est de 0,1 m. Après 100 jours elle est de 1,27 m. Après 200 jours le tournesol atteint sa hauteur maximale de 2 m.

Déterminez une fonction polynôme du troisième degré qui décrit la croissance du tournesol pendant les 200 premiers jours.

2. Les biologistes proposent la fonction suivante pour modéliser la croissance du tournesol :

$$h_\alpha(t) = \frac{2 \cdot \mathbf{e}^{\alpha \cdot t}}{\mathbf{e}^{\alpha \cdot t} + 19}$$

où t représente le temps en jours et où $\alpha > 0$.

1. Quelle est la hauteur du tournesol au début des mesures d'après ce modèle ?
2. Démontrez que la fonction h_α est strictement croissante.
3. Vers quelle valeur limite tend la hauteur du tournesol d'après ce modèle ? Expliquez en quoi ce modèle mathématique est différent de la réalité.
4. À quel instant t_0 la vitesse de croissance est-elle maximale et quelle est alors la hauteur du tournesol ? Quelle particularité présente le graphe de h_α pour $t = t_0$?
5. Les biologistes ont montré que la valeur de α peut varier entre $0,015$ et $0,055$ selon la variété du tournesol. Tracez le graphe de h_α pour différentes valeurs de h_α. Quelle information le paramètre α fournit-il dans le contexte de la croissance du tournesol ?
6. Une fonction telle la fonction h_α s'appelle la « fonction logistique ». En général une fonction logistique est définie comme suit :

$$H(t) = \frac{a \cdot \mathbf{e}^{\alpha \cdot t}}{\mathbf{e}^{\alpha \cdot t} + b}$$

où a, b et α sont des constantes réelles strictement positives.

Déterminez les paramètres a et b de telle sorte que la fonction H décrive la croissance d'une variété de tournesol dont la hauteur est de 0,2 m au début des mesures et dont la hauteur tend vers la valeur limite de 1,8 m.

Exercice 5

La *longueur* (en cm) de beaucoup de poissons de t années communément mis en vente peut être donnée par une fonction de croissance de von Bertalanffy de la forme :

$$f(t) = a \cdot \left(1 - b \cdot \mathbf{e}^{-k \cdot t}\right)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$ sont des constantes.
Le *poids* (en kg) d'un flétan du Pacifique en fonction de sa longueur (en m) est donné par la formule

$$p(l) = 10{,}375 \cdot l^3$$

1. Déterminez a, b et k sachant que
   - à la limite un flétan atteindra une longueur de 2 m,
   - un flétan de 10 ans a une longueur de 168,4 cm
   - et la vitesse de croissance d'un flétan de 10 ans est de 5,69 cm/année.
2. Pour la suite du problème, on va poser :

$$a = 200 \qquad b = 0{,}956 \qquad k = 0{,}18$$

   Estimez l'âge et la vitesse de croissance d'un flétan dont la longueur est de 100 cm.
3. Calculez le poids d'un flétan de 5 ans.
4. Quelle est la limite du poids atteint par un flétan du Pacifique ?
5. (a) Exprimez le poids d'un flétan en fonction de son âge.
   (b) Quand la vitesse de croissance du poids est-elle maximale et quelle est alors sa valeur ? (Utilisez l'expression de 5a.)

Exercice 6

Après avoir bu une certaine quantité d'alcool q (en g) à l'instant $t = 0$ (unité : h), on observe que le taux d'alcool dans le sang, encore appelé *taux d'alcoolémie* en ‰, varie avec le temps t (unité : h) approximativement selon la fonction suivante :

$$f(t) = \frac{q}{b} \cdot \left(1 - \mathbf{e}^{-at}\right) - 0{,}145\, t$$

Le paramètre b dépend de la personne en question, notamment de son poids et vaut ici $b = 29{,}5$.
Le paramètre a dépend en particulier de la présence de nourriture dans l'estomac.
Bien sûr, seule la partie de Γ_f située dans le premier quadrant du repère a une signification réelle et tous les résultats des points suivants sont à donner à 10^{-3} près.

1. À l'instant $t = 0$, une personne boit à jeun trois verres de vin contenant chacun en moyenne 11 g d'alcool. Vu l'absence de nourriture dans son estomac, la valeur de a vaut $a = 9$.
   (a) Déterminez graphiquement sur la **voyage** 200 l'*intervalle de temps* pendant lequel la personne a de l'alcool dans le sang.
   (b) Analysez les *variations du taux d'alcoolémie* en fonction de t. Quand atteint-il son *maximum* ? Déterminez aussi sa *valeur maximale*. Résumez les résultats dans un *tableau de variation*.
   (c) Sachant qu'un conducteur au Luxembourg est en infraction si son taux est égal ou supérieur à 0,8 ‰, déterminez graphiquement l'*intervalle de temps* pendant lequel la personne ne devrait pas conduire.

(d) En tenant compte des résultats précédents, *représentez* dans un repère approprié le taux d'alcoolémie en fonction de t.

(e) L'*effet* d'une substance dépend aussi bien de son taux que du temps de sa présence dans le corps humain. Il est souvent décrit par l'*aire de la surface comprise entre l'axe des t la courbe* Γ_f. Déterminez l'effet des trois verres de vin.

2. Après avoir bien mangé, la même personne boit à l'instant $t = 0$ trois verres de vin contenant chacun en moyenne 11 g d'alcool. Mais cette fois-ci, le paramètre a vaut $a = 1{,}2$.

   (a) Trouvez le *taux d'alcoolémie maximal* dans ces nouvelles conditions. Est-ce qu'il dépasse le seuil de 0,8 ‰ ?

   (b) Analysez si la personne pourrait boire un quatrième verre et rester en dessous du taux limite de 0,8 ‰.

Exercice 7

L'évolution de la concentration d'un médicament **A** dans le sang d'un patient peut être décrite par une fonction f définie par

$$f(t) = 20 \cdot t \cdot \mathbf{e}^{-0{,}5t}$$

avec $0 \leq t \leq 12$, où

- t désigne le temps en heures après la prise du médicament **A** qui s'effectue au moment $t = 0$
- $f(t)$ est exprimé en milligrammes par litre de sang (mg/l)

1. (a) À quel moment la concentration de ce médicament est-elle *maximale* ?
   Quelle est alors la valeur de cette concentration ?

   (b) Le médicament perd son *efficacité* si sa concentration tombe strictement en dessous de 5 mg/l.
   Déterminez la période pendant laquelle le médicament est efficace.

   (c) À quel moment l'élimination du médicament par le corps du patient est-elle *la plus forte* ?
   Quelle est alors la vitesse de cette élimination ?

2. Quatre heures après la première prise du médicament **A**, on donne ce médicament une deuxième fois au patient. On suppose que le dosage de la deuxième prise est identique à celui de la première prise et que les concentrations du médicament dans le sang du patient sont simplement additionnées.

   (a) Représentez graphiquement l'évolution de la concentration totale du médicament dans le sang pendant les douze premières heures après la première prise (c'est-à-dire pour $0 \leq t \leq 12$).

   (b) La concentration du médicament ne doit pas dépasser 20 mg/l. Est-ce que cette directive médicale est respectée ?

3. En changeant la composition du médicament **A**, on peut fabriquer un médicament **B** dont l'évolution de la concentration dans le sang peut être décrite par une fonction g définie par

$$g(t) = a \cdot t \cdot \mathbf{e}^{-bt}$$

avec $0 \leq t \leq 12$, où

- t désigne le temps en heures après la prise du médicament **B** qui s'effectue au moment $t = 0$
- $g(t)$ est exprimé en milligrammes par litre de sang (mg/l)
- a et b sont des constantes réelles strictement positives.

   (a) Déterminez les constantes a et b et l'expression analytique de g, pour que la concentration de ce médicament dans le sang atteigne, 4 heures après la prise, sa valeur maximale de 14 mg/l.

   (b) Comparez les médicaments **A** et **B** quant à leur efficacité pendant les douze premières heures après la prise, en supposant qu'ils sont efficaces si leur concentration dans le sang est supérieure à 5 mg/l.