1 Exercices d'introduction

Exercice 1

Imaginez que Lora ait placé 1 € en l'an 1 à un taux de 2 % (intérêts composés), et qu'elle aille prélever le capital avec tous les intérêts au bout de 2 000 ans.

1. Pensez-vous qu'elle disposera des moyens nécessaires pour financer un bon repas ? des vacances pour toute la famille ? ou ... ?
2. À quel moment son capital a-t-il dépassé 1 000 € ? 10 000 € ? 1 000 000 € ?

Exercice 2

Lena place 1 € à un taux d'intérêt annuel de 100 %. Calculez son capital au bout de un an si les intérêts sont ajoutés

1. en une fois, à la fin de l'année
2. en deux fois, chaque fois au bout de 6 mois
3. en trois fois, chaque fois au bout de 4 mois
4. en 4 fois, chaque fois au bout de 3 mois
5. en 5 fois, chaque fois au bout de 2,4 mois
6. en 6 fois, ...
7. en 12 fois, ...
8. en 365 fois, à la fin de chaque jour
9. au bout de chaque heure
10. en n fois, ...

Exercice 3

Le *taux annuel de croissance* de la population mondiale était de 1,2 % par an en 2003.

1. Sachant que la population mondiale en 2003 était 6,3 milliards, déterminez (en milliards) ce que sera la population mondiale en l'an 2020, puis en 2050, en 2100 (on supposera que le taux annuel reste constant).
2. Si le taux de croissance ne change pas, après combien d'années la population mondiale aura-t-elle doublé ?

Exercice 4

La demi-vie (ou : période de désintégration) d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon de cet élément est divisée par 2.

1. Un échantillon contient 5 g de radium. Quelle sera la masse de radium dans 10 500 ans sachant que la période de désintégration du radium est de 1 500 ans ?
2. La période de désintégration d'un isotope de l'iode est de 8 jours. Quelle était, il y a 30 jours, la masse de cet isotope dans un échantillon qui en renferme aujourd'hui 1 g ?

Exercice 5

L'isotope iode 131 perd 8,3 % de sa masse par jour.

1. Calculez la demi-vie T de l'iode 131.
2. Représentez graphiquement l'évolution au cours du temps d'un échantillon de 50 mg d'iode 131.
3. Montrez que la fonction qui décrit l'évolution d'un échantillon d'iode 131 peut être mise sous la forme
$$t \longmapsto K \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

2 Aspects algébriques

2.1 Transformations d'expressions

Exercice 6

Écrivez les nombres suivants sans exposant négatif, ni fractionnaire et simplifiez les expressions obtenues :

1. 3^{-2}
2. $3^{0{,}75}$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1{,}25}$
4. $9^{-\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$
5. $\dfrac{4^{-0{,}5} \cdot 16^{\frac{1}{4}}}{32^{0{,}2}}$
6. $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2^{\sqrt{9}}}$

Exercice 7

Complétez les équivalences suivantes :

1. $\log 10\,000 = \square \iff 10^{\square} = 10\,000$
2. $\log \square = -3 \iff \square^{\square} = \frac{1}{1\,000}$
3. $10^{\square} = \sqrt{10} \iff \log \sqrt{10} = \square$
4. $10^{\square} = 100\sqrt{10} \iff \log \sqrt{100\sqrt{10}} = \square$
5. $2^{\square} = 1\,024 \iff \log_2 1\,024 = \square$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\square} = 1\,024 \iff \log_{\frac{1}{2}} 1\,024 = \square$
7. $\sqrt{\square} = 3 \iff \log_{\square}(3) = \square$
8. $\sqrt{\sqrt{\square}} = 3 \iff \log_{\square}(3) = \frac{1}{4}$
9. $\sqrt{3}^{\square} = 81 \iff \log_{\sqrt{3}}(81) = \square$
10. $5^{-2} = \square \iff \log_{\square}(25) = \square$
11. $\log_5(625) = \square \iff \log_{625}(5) = \square$
12. $\ln \sqrt{e} = \square \iff e^{\square} = \sqrt{e}$
13. $\ln \square = -3 \iff \square^{-3} = \frac{1}{e^3}$
14. $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{\square} \iff \square\, \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = -\frac{2}{3}$

Exercice 8

En partant des relations algébriques

- $\ln \mathrm{e} = 1$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

simplifiez les expressions suivantes :

1. $\ln \mathrm{e} - \ln \mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{\ln \mathrm{e}} + \ln \dfrac{1}{\mathrm{e}}$
2. $\mathrm{e}^{3\ln 2} + \mathrm{e}^{-\ln 5} - (\ln \mathrm{e})^2$
3. $\ln \mathrm{e}^3$
4. $\ln \dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$
5. $\left(\ln \dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^2$

Exercice 9

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant uniquement et systématiquement la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

1. $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{125}}$
2. $\log \sqrt{1000}$
3. $\log_{\frac{5}{4}} 0,64$
4. $\log_{0,5} 32$
5. $\log_{2\sqrt{3}} 144$
6. $\exp_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 8\right)$

Exercice 10

Soit $x > 0$. En posant $u = \log_2 x$, exprimez en fonction de u :

1. $\log_2 x^2$
2. $\log_2 \sqrt{2x}$
3. $\log_2 \dfrac{x^3}{64}$
4. $\log_2^2 x$
5. $\log_2 \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}}$

Exercice 11

Soit $a, b, c > 0$. Posons :

$$u = \ln a, \quad v = \ln b, \quad w = \ln c$$

Exprimez en fonction de u, v, w (linéarisation) :

1. $\ln ab^2c$
2. $\ln \dfrac{ab}{c^2}$
3. $\ln \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2$
4. $\ln \sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}}$
5. $\left(\ln \dfrac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}\right)^2$

2.2 Un mot sur les calculatrices

Exercice 12

Comparez les résultats affichés par votre calculatrice si vous évaluez les expressions suivantes :

1. `3^0.75` `3^3/4` `3^(3/4)`
2. `2^-3` `2^-3.` `2^-3.0`

Exercice 13

Déterminez à l'aide de votre calculatrice une *valeur approchée* à 10^{-2} près :

1. e^{-3}
2. $\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$
3. $2\,\mathrm{e}^{-2}\sqrt{\mathrm{e}}$
4. e^{π}