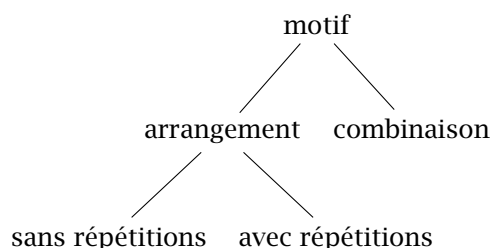


1 Arranger — Permuter — Combiner

Le premier paragraphe formule les problèmes de référence, les problèmes-type qui devraient clarifier, du moins je l'espère, les idées *principales* de ce chapitre : la distinction et les relations entre

- *arrangements*, où l'ordre importe
- et *combinaisons* (choix) où l'ordre est sans importance.



2 Des chiffres et des lettres

Exercice 13

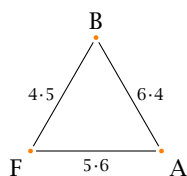
- $3 \cdot A_7^2$, car
 - le bloc peut occuper trois positions différentes
 - A, B, C étant réservées pour le groupe, il n'y a plus que 7 lettres pour 2 places disponibles.
- $3! \cdot 3 \cdot A_7^2$, en permutant les éléments d'un bloc.
- Comprenez bien : il s'agit de mots dans lesquels apparaissent les lettres A, B, C, dans cet ordre, mais pas nécessairement sous forme de bloc de trois lettres contiguës. La position du groupe peut être choisie de C_5^3 manières différentes.
Il y a donc $C_5^3 \cdot A_7^2$ mots.
- Si nous renonçons à imposer l'ordre lexicographique dans la question précédente, il y aura $3! \cdot C_5^3 \cdot A_7^2 = A_5^3 \cdot A_7^2$ mots différents.

3 Délégués et comités

Exercice 14

Un comité s'obtient en combinant un des C_{20}^4 choix d'un 4-groupe de professeurs avec un des C_{30}^{10} choix d'un 10-groupe d'élèves : $C_{20}^4 \cdot C_{30}^{10}$.

Exercice 15



Nombre de choix : $4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4$

Exercice 16

Nombre de cas *possibles* : C_{20}^2 (le nombre de paires dans un ensemble à $12 + 6 + 2$ éléments).

Nombre de cas *favorables* :

$$C_{12}^2 + C_6^2 + C_2^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} + 1$$

D'après le marquis de Laplace, la probabilité d'un évènement, dans l'hypothèse d'équiprobabilité, est le nombre de cas favorables (à l'évènement) divisé par le nombre de cas possibles.

Exercice 17

- M. X choisit ses 10 élèves et confie le reste aux soins pédagogiques de Mme Y : ce qui fait $C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$ dédoublements.
- L'ordre des choix est sans importance, nous divisons le nombre obtenu précédemment par $2!$ (le nombre de manières de permuter deux objets, oui, c'est 2) : $\frac{C_{20}^{10}}{2!}$

Exercice 18

C'est évidemment une variante de l'exo précédent.

- $C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$
- $\frac{C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}}{3!}$

Exercice 19

- Nous devons donc *exclure* les molécules du type $\Gamma\Delta*$ où * désigne n'importe quel atome du réservoir, différent de Γ et Δ .
Il y a donc : $C_{10}^3 - C_8^1$ molécules de ce type.

On peut aussi raisonner par *disjonction des cas*, c'est-à-dire effectuer une *classification* des groupes acceptables.

Les groupes acceptables sont de la forme

- $\Gamma **$ (il y en a C_8^2)
 - $\Delta **$ (C_8^2 groupes)
 - $***$ (C_8^3 groupes)
- ce qui fait ...

Enfin, Barbara propose de classer les groupes acceptables de la manière suivante :

- les groupes *sans* Γ : il y en a C_9^3 (nous devons choisir 3 membres parmi les 9 non- Γ)
 - les groupes *avec* Γ , donc nécessairement sans Δ , c'est-à-dire de la forme Γ et deux non- Δ : il y en a C_8^2
- Et effectivement : $C_9^3 = C_8^3 + C_8^2$ (la propriété d'additivité de nos chemins dans un quadrillage).

- Classification : un groupe est acceptable
 - s'il contient α et β : C_8^1 possibilités
 - s'il ne contient ni α , ni β : C_8^3 choix possibles
 D'où ...

4 Boules et tirages

Exercice 20

Les couleurs doivent apparaître dans l'ordre indiqué.

	avec remise	sans remise
(a)	$\frac{B_4^4}{B_{10}^4}$	$\frac{A_4^4}{A_{10}^4}$
(b)	$\frac{B_4^3 \cdot 3}{B_{10}^4}$	$\frac{A_4^3 \cdot 3}{A_{10}^4}$
(c)	$\frac{4 \cdot 3 \cdot B_3^2}{B_{10}^4}$	$\frac{4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3)}{A_{10}^4}$

Exercice 21

Le nombre de cas possibles est : A_{20}^4 . Nous allons indiquer ci-dessous uniquement les nombres de cas favorables aux événements considérés ; à vous d'en déduire les probabilités.

- $C_4^3 \cdot A_{10}^3 \cdot A_{10}^1 = C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot 4!$
- A_{10}^4
- En effectuant la classique classification « exactement 2 », « exactement trois », ..., on obtient :

$$C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot 4! + C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot 4! + C_{10}^4 \cdot 4! \\ = C_4^2 \cdot A_{10}^2 \cdot A_{10}^2 + C_4^3 \cdot A_{10}^3 \cdot A_{10}^1 + C_4^4 \cdot A_{10}^4$$

- Classification : « aucune », « exactement une », « exactement deux » :

$$C_4^0 \cdot A_{10}^4 + C_4^1 \cdot A_{10}^1 \cdot A_{10}^3 + C_4^2 \cdot A_{10}^2 \cdot A_{10}^2$$

Exercice 22

- Probabilité : $\frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{B_7^2}$
- Probabilité : $\frac{2 \cdot (3 \cdot 4)}{A_7^2}$

Exercice 23

Nombre de cas possibles : C_{11}^3 .
Indiquons les cas favorables aux différents événements :

- $5 \cdot 3 \cdot 3$
- $C_5^3 + C_3^3 + C_3^3$
- $C_5^2 \cdot C_6^1$
- $C_5^2 \cdot C_6^1 + C_5^3$ (contrôlez en calculant le nombre de cas favorables à l'évènement contraire).

Exercice 24

- simultanément : $\frac{C_5^2}{C_9^2}$
successivement, avec remise : $\frac{B_5^2}{B_9^2}$
- simultanément : $\frac{5 \cdot 4}{C_9^2}$
successivement, sans remise : $\frac{2 \cdot (5 \cdot 4)}{A_9^2}$ (1 paire, 1 impaire ou bien : 1 impaire, 1 paire)

Exercice 25

- Pensez à l'exercice sur les villageois et leurs bistros ; on va associer à chaque boule (villageois) sa case (son bistrot), les répétitions étant exclues ; on comprend ainsi que les rangements donc des arrangements sans répétitions des 7 urnes :

1	2	3	4	5	boules
2	5	7	3	1	urnes

Il y a donc A_7^5 rangements possibles.

On pourra aussi choisir d'abord les 5 urnes pour les cinq boules, ce qui fait C_7^5 choix distincts, et répartir ensuite de toutes les manières possibles (il y en a 5!) ces urnes entre les 5 boules : il y a donc $C_7^5 \cdot 5!$ rangements différents.

- On va encore associer à chaque boule sa case, des répétitions étant licites ; les rangements sont des arrangements avec répétitions :

1	2	3	4	5
2	7	2	7	6

Il y a donc B_7^5 rangements possibles.

- Les boules sont indiscernables (pensez : balles de tennis de table). Il suffit donc de choisir 5 urnes :



Il y a donc C_7^5 rangements possibles.

5 Cartes

Exercice 26

Évidemment $\frac{1}{32}$. On pourrait affirmer que le texte décrit tout simplement une technique biscornue de tirage d'une carte.

Exercice 27

✗ Tirages simultanés

Nombre de cas possibles : C_{32}^2 .

On va indiquer maintenant uniquement les nombres de cas favorables — vous allez en déduire sans difficulté aucune la probabilité correspondante.

- C_{16}^2
- C_8^2
- $4 \cdot C_8^2$
- $4 \cdot 4$
- On interprétera le « ou » au sens inclusif : il suffit que l'une des deux possibilités soit réalisée.
En passant par l'évènement contraire (« aucun des deux ») : $C_{32}^2 - C_{21}^2$.

✗ Tirages successifs : sans remise

Nombre de cas possibles : $C_{32}^2 \cdot 2 = A_{32}^2$.

On va indiquer maintenant uniquement les nombres de cas favorables.

- $C_{16}^2 \cdot 2 = A_{16}^2$
- $C_8^2 \cdot 2 = A_8^2$
- $4 \cdot C_8^2 \cdot 2 = 4 \cdot A_8^2$
- $4 \cdot 4 \cdot 2$
- $(C_{32}^2 - C_{21}^2) \cdot 2$.

✗ Tirages successifs : avec remise

Nombre de cas possibles : B_{32}^2 .

On va indiquer maintenant uniquement les nombres de cas favorables.

- B_{16}^2
- B_8^2
- $4 \cdot B_8^2$
- $4 \cdot 4 \cdot 2$
- $B_{32}^2 - B_{21}^2$.

Exercice 28

Nombre de cas possibles : C_{52}^5 .

Indiquons le nombre de cas favorables à chacun des évènements indiqués :

- $C_8^2 \cdot C_{24}^3$
- $C_{32}^5 - C_{24}^5 - C_8^1 \cdot C_{24}^4$
- $C_4^2 \cdot C_{28}^3$
- $C_4^0 \cdot C_{32}^5 - C_4^1 \cdot C_{28}^4$
- $1 \cdot C_{21}^4 + 7 \cdot 3 \cdot C_{21}^3$ (la dame de coeur!)
- Notons x le nombre d'éléments (le cardinal) de l'évènement $\{C = 1 \text{ et } D \geq 1\}$; la partition $\{C = 1\} = \{C = 1 \text{ et } D = 0\} \cup \{C = 1 \text{ et } D \geq 1\}$ permet d'écrire l'équation en x

$$C_8^1 \cdot C_{24}^4 = C_7^1 \cdot C_{21}^4 + x$$
- Notons x le cardinal de $\{D = 1 \text{ et } C \geq 1\}$; alors la partition $\{D = 1\} = \{D = 1 \text{ et } C = 0\} \cup \{D = 1 \text{ et } C \geq 1\}$ permet d'écrire l'équation

$$C_4^1 \cdot C_{28}^4 = C_3^1 \cdot C_{21}^4 + x$$

- Le complémentaire de l'évènement

$$\{D \geq 1 \text{ et } C \geq 1\}$$

est $\{D = 0 \text{ ou } C = 0\}$, dont le cardinal est

$$C_{28}^5 + C_{24}^5 - C_{21}^5$$

puisque

$$\begin{aligned} & \#\{D = 0 \text{ ou } C = 0\} \\ &= \#\{D = 0\} + \#\{C = 0\} - \#\{C = 0 \text{ et } D = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 29

- $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1$
- $C_8^1 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1$
- $C_4^1 \cdot C_4^2$
- $C_4^1 \cdot C_8^3$
- $C_4^1 \cdot C_8^2 \cdot C_{24}^1$
- $C_{16}^2 \cdot C_{16}^1$
- C_{16}^3

Exercice 30

Nombre de cas possibles : C_{52}^{10} .

Indiquons maintenant le nombre de cas favorables à chacun des évènements considérés.

- $C_{13}^4 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^1$
- $C_{52}^{10} - C_{39}^{10}$

Exercice 31

- Choix des deux valeurs : A_8^2 (on distingue la valeur principale et l'autre)
- Choix correspondant des cartes : $C_4^3 \cdot C_4^2$
✗ Total : $A_8^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2$
Variante : $(C_8^1 \cdot C_4^3) \cdot (C_7^1 \cdot C_4^2)$
- Choix du bloc de valeurs consécutives : 4
- Choix de la couleur correspondante : 4
✗ Total : $4 \cdot 4$
- Choix du groupe : C_8^5
- Choix de la couleur : 4
✗ Total : $4 \cdot C_8^5$
- Choix des valeurs : 4
- Choix des couleurs : B_4^5
✗ Total : $4 \cdot 4^5$
- Choix de la valeur commune des 4 cartes : 8
- Choix de l'« autre » valeur : $4 \cdot 7$
✗ Total : $8 \cdot 28$

6 Exercices algébriques

6.1 Arithmétique factorielle

Exercice 32

1. $72!$

3. 100

5. $(n + 1)!$

7. $\frac{(n + 1) \cdot n! - n!}{(n + 1) \cdot n! + n!} = \frac{(n + 1) - 1}{(n + 1) + 1}$

2. $83!$

4. $C_{80}^{76} = C_{80}^4 = \frac{A_{80}^4}{4!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}$

6. $\frac{(n + 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 1) \cdot n!}{(n + 1) \cdot (n + 2)} = (n + 3) \cdot n!$

6.2 La formule de Newton

Exercice 33

L'expression proposée n'est autre que le développement de $(0,34 + 0,64)^5$; la valeur en est 1.

Exercice 34

Remarquez que, dans les développements suivants faisant intervenir des fractions, on a parfois intérêt à réduire au même dénominateur.

1. $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

2. $(2x + 3y)^4 = 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$

3. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3 = \frac{x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 1}{x^3} = x^6 + 3 \cdot x^3 + \frac{1}{x^3} + 3$

4. $(a - 2b)^5 = a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$

5. $\left(\sqrt{2} \cdot x^3 - \frac{1}{\sqrt{2} \cdot x}\right)^4 = \left(\frac{2x^4 - 1}{\sqrt{2}x}\right)^4 = \frac{16x^{16} - 32x^{12} + 24x^8 - 8x^4 + 1}{4x^4} = 4 \cdot x^{12} - 8 \cdot x^8 + 6 \cdot x^4 + \frac{1}{4 \cdot x^4} - 2$

6. $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{x^2}{2}\right)^6 = \frac{x^{12}}{64} - 32^{-\frac{7}{2}} \cdot x^9 + \frac{15 \cdot x^6}{8} - 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x^3 - \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{x^3} + \frac{8}{x^6} + 15$

Exercice 35

Attention! Il ne s'agit pas de calculer le coefficient de x^7 . Le terme d'exposant k (qui est le $k + 1$ -ième terme, car nous comptons à partir de 0) du développement de

$$(a + b)^{11}$$

ordonné suivant les puissances *croissantes* de a , est, d'après la formule d'Isaac Newton

$$C_{11}^k \cdot a^k \cdot b^{11-k}$$

Dans notre cas, ce terme s'écrit :

$$C_{11}^k \cdot (3x)^k \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^{11-k}$$

En particulier, pour $k = 6$:

$$C_{11}^6 \cdot (3x)^6 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^5$$

expression qu'il s'agit encore de simplifier (réduire) :

$$C_{11}^6 \cdot (3x)^6 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^5 = -462 \cdot 2^5 \cdot 3^6 \cdot x^{6-5} = -10\,777\,536x$$

Le 7^e terme du développement ordonné suivant les puissances *décroissantes* de x est le 6^e terme du développement ordonné suivant les puissances *croissantes*; c'est donc le terme correspondant à $k = 5$.

Exercice 36

1. Le terme général du développement de notre binôme est

$$C_{10}^k \cdot (3x^2)^k \cdot (-2)^{10-k} = C_{10}^k \cdot 3^k (-2)^{10-k} \cdot x^{2k}$$

Le coefficient de $x^6 = x^{2k}$ s'obtient donc pour $k = 3$:

$$C_{10}^3 3^3 (-2)^{10-3} = \dots$$

2. Le terme général du développement est

$$\mathbf{C}_5^k \cdot (2x^2)^k \cdot \left(-\frac{4}{x}\right)^{5-k} = \dots \cdot x^{2k-(5-k)} = \dots \cdot x^{3k-5}$$

Donc $3k - 5 = 1$ ou encore $k = 2$; d'où le coefficient de x :

$$\mathbf{C}_5^2 \cdot 2^2 \cdot (-4)^{5-2} = \dots$$

3. Le terme en x^6 du développement de $(x + 7)^8$ est

$$\mathbf{C}_8^6 \cdot x^6 \cdot 7^{8-6} = \dots$$

4. Le terme général du développement est

$$\mathbf{C}_{12}^k \cdot (3x)^k \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{12-k} = \dots \cdot x^{k-2 \cdot (12-k)}$$

En comparant les exposants

$$k - 2 \cdot (12 - k) = 3k - 24 = 3$$

ce qui implique que $k = 9$; d'où le coefficient de x^3 :

$$\mathbf{C}_{12}^9 \cdot 3^9$$

Exercice 37

1. Le terme milieu est celui d'indice $k = 6$. Nous devons donc calculer l'expression

$$\mathbf{C}_{12}^6 \cdot (3x)^6 \cdot 2^6$$

2. Les termes sont ceux d'indice $k = 5$ et d'indice $k = 6$; nous devons donc calculer

$$\mathbf{C}_{11}^5 \cdot (4x^2)^5 \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^6 \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{11}^6 \cdot (4x^2)^6 \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^5$$

3. Les termes sont ceux d'indice $k = 3$ et $k = 4$; nous devons donc calculer

$$\mathbf{C}_7^3 \cdot (\sqrt{2} \cdot x)^3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_7^4 \cdot (\sqrt{2} \cdot x)^4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

Exercice 38

D'après la formule de Newton :

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}_n^k$$

Interprétation : dans un ensemble à n éléments, il y a exactement 2^n parties, dont \mathbf{C}_n^k à k éléments.

Exercice 39

D'après la formule de Newton :

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}_n^k \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbf{C}_n^k$$

On en déduit que

$$\mathbf{C}_n^1 + \mathbf{C}_n^3 + \mathbf{C}_n^5 + \dots = \mathbf{C}_n^0 + \mathbf{C}_n^2 + \mathbf{C}_n^4 + \dots$$

Interprétation : dans un ensemble à n éléments, il y a autant de parties ayant un nombre *pair* d'éléments que de parties ayant un nombre *impair* d'éléments.