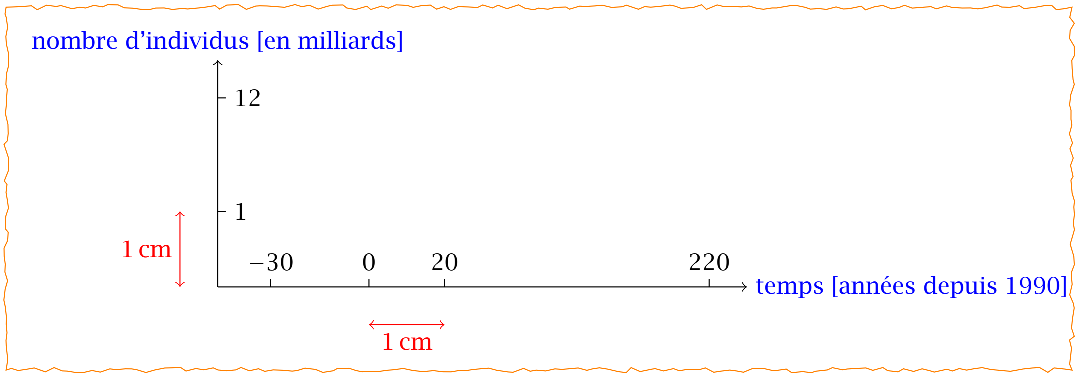
1. (a) Préparation de la *représentation graphique* : *esquisse*



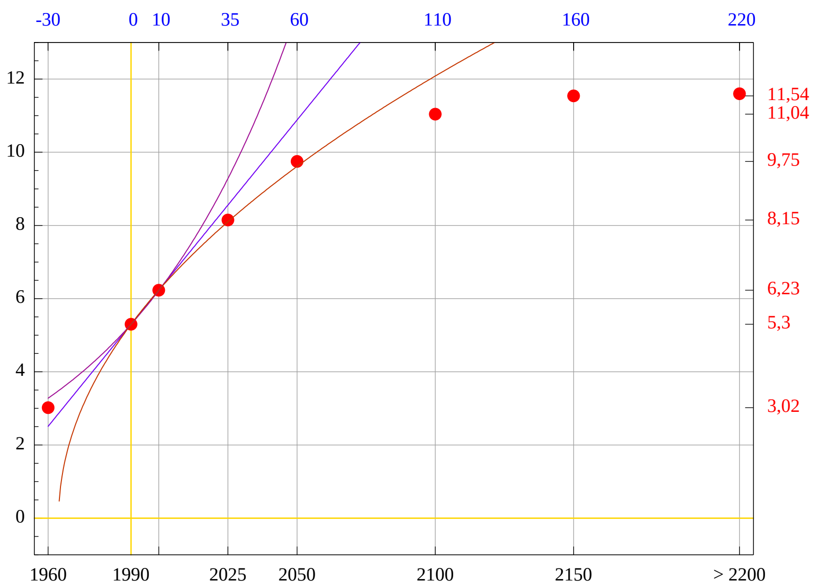
Afin de construire (dans **TABLE**) des *tableaux de valeurs* pour les trois fonctions (fonctions dont nous n'aurons plus besoin par la suite), nous posons les définitions suivantes (dans **HOME**, ou même directement dans l'éditeur **Y=**) :

```
NewProb
round(0.093x+5.3, 2) ⟶ y1(x)
round(5.3e^(0.016x), 2) ⟶ y2(x)
round(√(1.072t+28.09), 2) ⟶ y3(x)
```

(attention ! il y a une erreur dans la dernière ligne — laquelle ?) et dans l'éditeur **TBLSET** nous précisons les *paramètres d'échantillonnage*

```
tblStart = −30
Δtbl = 10
```

On obtient alors sans trop de difficultés la *représentation graphique* de ces trois fonctions :



(b) Aucune de ces fonctions n'est *bornée* : elles croissent indéfiniment en contradiction avec l'hypothèse que la population se stabilise (après 2200).

Remarquons que même pour l'intervalle [1960; 2050] l'approximation fournie par les fonctions est peu satisfaisante.

(c) – Le modèle de la *croissance exponentielle* ne convient pas du tout, le graphe s'éloignant beaucoup trop rapidement des données.
– La même remarque s'applique au *modèle linéaire*, quoique dans une moindre mesure.
– Le *modèle parabolique* convient à peu près pour la période $[1990; 2050]$.

2. (a) Étudions le comportement de y pour les « grandes » valeurs de t :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a}{1+b\cdot \mathrm{e}^{-\alpha\cdot t}} = \frac{a}{1+0} = a$$

car $\alpha > 0$. D'après nos données, a vaut donc 11,6.

(b) Pour déterminer les deux constantes b et α, nous avons besoin de deux conditions pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues ; l'énoncé nous impose

$$y(-30) = 3{,}02 \quad y(0) = 5{,}3$$

D'où le code

```
11.6/(1+b*e^(−α t)) ⟶ y(t)
{y(0) = 5.3, y(−30) = 3.02} ⟶ conds
solve(conds, {b,α})
```

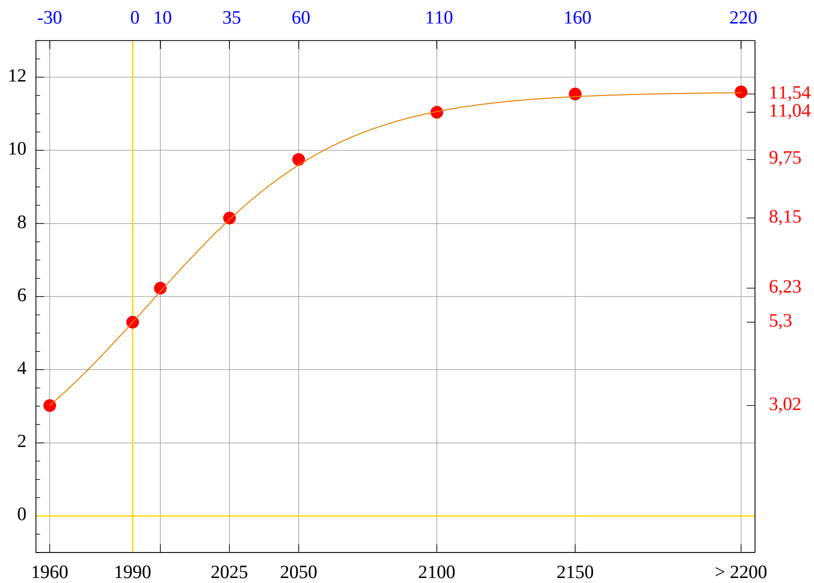
qui fournit les valeurs approchées :

$$b \approx 1{,}1887 \qquad \alpha \approx 0{,}029$$

3. (a) On utilisera les paramètres et dimensions graphiques obtenues en (1a). Le tableau des valeurs sera calculé à l'aide de la définition

```
NewProb
11.6/(1+1.1887*e^(−0.029 t)) ⟶ y(t)
```

Ces travaux préliminaires permettent d'obtenir la représentation graphique de y :



(b) • *Les asymptotes*
Les deux expressions voyage 200

```
limit(y(t),t,−∞)
limit(y(t),t,∞)
```

permettent d'écrire d'une part

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$$

ce qui signifie que le graphe admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = 0$ [1]
et d'autre part

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 11{,}6$$

ce qui signifie que le graphe admet une deuxième asymptote horizontale.

- *Les extrémas*
  Nous voulons connaître le *signe* de la dérivée y' de y :

```
d(y(t),t) ⟶ dy(t)
zeros(dy(t),t)
```

La dérivée première ne s'annulant jamais (car la voyage 200 fournit comme résultat une liste vide), son signe est *constant* (par *continuité*) ; il suffit de le déterminer en un point-témoin quelconque, par exemple pour $t = 10$:

Utilisez la fonction sign si le nombre en tant que tel ne vous intéresse guère.

```
sign(dy(10))
```

Ce dernier résultat étant 1, y est une fonction *strictement croissante*.
Ou encore, plus simplement [2] :

```
solve(dy(t) > 0, t)
```

Nous obtenons le résultat **true** ce qui signifie que la fonction y' est toujours *strictement positive* et partant y est strictement croissante.

- *Les points d'inflexion*
  Nous devons déterminer les réels en lesquels y'' s'annule et change de signe :

```
d(y(t),t,2) ⟶ d2y(t)
zeros(d2y(t), t) ⟶ ts
```

D'après le calcul précédent, $t_0 \approx 5{,}96$ est le seul zéro de y'' ; en utilisant des réels-témoins choisis (de manière aléatoire) dans chacun des intervalles délimités par t_0

```
sign(d2y({3,7}))
```

nous obtenons le tableau

t	$-\infty$		t_0		$+\infty$
$y''(t)$		$+$	0	$-$	
$y'(t)$		$\nearrow$	$y'(t_0)$	$\searrow$	

1. Vous avez certainement remarqué que les notations de l'exercice ne sont pas particulièrement judicieuses.
2. Mais peut-être pas strictement conforme au programme — ce n'est pas clair

Calculons encore $y(t_0)$ (ordonnée du point d'inflexion) et $y'(t_0)$ (la vitesse de croissance en t_0) :

```
{y(t), dy(t)} | t=ts
```

D'où :

$$y(t_0) \approx 5{,}8 \qquad y'(t_0) \approx 0{,}084\,1$$

la population croît avec une vitesse de 84 millions d'individus par an.
Évidemment : l'expression

```
solve(d(y(t),t,2) > 0, t)
```

(qui donne comme résultat $t < 5.96\ldots$) permet de construire le tableau sans passer par des valeurs témoins.
On en déduit les coordonnées approchées du point d'inflexion I de y : $J(5{,}96; 5{,}8)$ est proche de I.

(c) L'*accroissement* (en milliards d'individus par an) est donné par y' ; nous devons donc résoudre l'inéquation

$$y'(t) < 0{,}05$$

respectivement déterminer le signe de

$$y'(t) - 0{,}05$$

L'expression

```
zeros(dy(t) − 0.05,t)
```

fournit comme zéros de $y'(t) - 0{,}05$ les réels $t_1 \approx -46$ et $t_2 \approx 58$.
Par *continuité*, le signe de y' est *constant* sur chacun des intervalles $(-\infty; t_0[$, $]t_0; t_1[$ et $]t_1, +\infty)$. À l'aide de trois réels-témoins, nous obtenons le *tableau des signes*

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
$y'(t) - 0{,}05$		$-$	0	$+$	0	$-$	

qui permet de conclure que l'accroissement annuel de la population était inférieur à 50 millions avant 1944 (= 1990 − 46) et après 2048(= 1990 + 58).

(d) La *moyenne* d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est donnée par

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc la moyenne de la population entre les instants $t = 0$ et $t = 160$ est donnée par

$$\frac{1}{160-0}\int_0^{160} y(t)\,\mathrm{d}t$$

L'expression voyage 200

```
∫(y(t),t,0,160)/160
```

nous fournit la valeur approchée 9,67 de la moyenne : entre 1990 et 2150, la moyenne (annuelle) de la population est presque de 10 milliards de personnes.

(e) L'abscisse du point d'inflexion, en laquelle y' prend sa valeur maximale, représente le moment de la croissance la plus forte de y :
en 1996 (= 1990+6), la croissance de la population était donc maximale, avec un accroissement de $y'(5{,}96) \approx 0{,}084$, c'est-à-dire de 84 millions de personnes par an.