Réponse 4

1. – On vérifie immédiatement, même sans machine, que $f(0) = 0$.
   – Une condition nécessaire pour que f présente en $t = 2\ln 2$ un extrémum est : $f'(2\ln 2) = 0$.
   Le code

   ```
   NewProb
   a*(e^(-b*t)-e^(-t)) ⟶ f(t)
   d(f(t), t) ⟶ df(t)
   solve(df(2*ln(2)) = 0, b) | a>0
   ```

   nous fournit alors les solutions $b = \frac{1}{2}$ et $b = 1$. La deuxième solution ne convient pas puisque sinon $f \equiv 0$ (fonction constante nulle).

   N'oubliez pas de justifier votre choix.

   Étudions le signe de $f''(2\ln 2)$. Le code

   ```
   d(f(t),t,2) ⟶ d2f(t)
   sign(d2f(2*ln(2))) | a>0 and b=1/2
   ```

   nous donne -1, quelque soit a, ce qui permet de conclure qu'il s'agit effectivement d'un maximum.
   – Si la valeur du maximum de f est 2,5, nous avons la relation

   $$f(2\ln 2) = 2{,}5$$

   qui permet de déterminer a : le code

   ```
   solve(f(2*ln(2))=2.5, a) | b=1/2
   ```

   nous donne la valeur $a = 10$.

   Résumons : les données permettent de conclure que

   $$f(t) = 10 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t}\right)$$

2. Le code

   ```
   NewProb
   11*(e^(-b*t)-e^(-t)) ⟶ g(t)
   approx(solve(g(6)=2, b))
   ```

   permet de conclure que $b \approx 0{,}282$.
   Si la fonction atteint un extrémum en t alors $f'(t) = 0$: une valeur approchée de t est donnée par

   ```
   zeros(d(g(t),t), t) | b=0.282
   ```

   c'est-à-dire $t \approx 1{,}763$.
   Il s'agit bien d'un maximum puisque

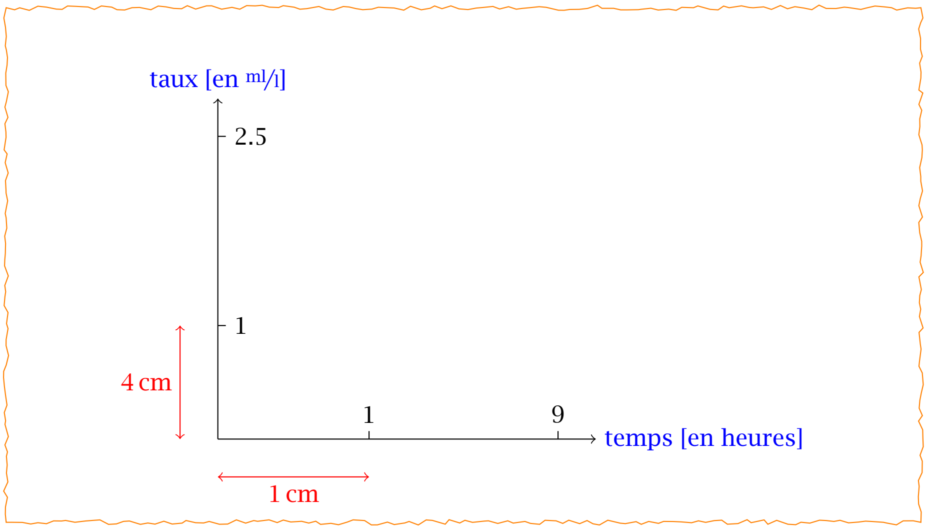
   ```
   sign(d(g(t),t,2)) | b=0.282 and t=1.763
   ```

   nous donne -1.
   Une valeur approchée du maximum est $g(1{,}763) \approx 4{,}803$.

3. – Étude de la fonction f définie par

   $$f : t \longmapsto 10 \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t}\right)$$

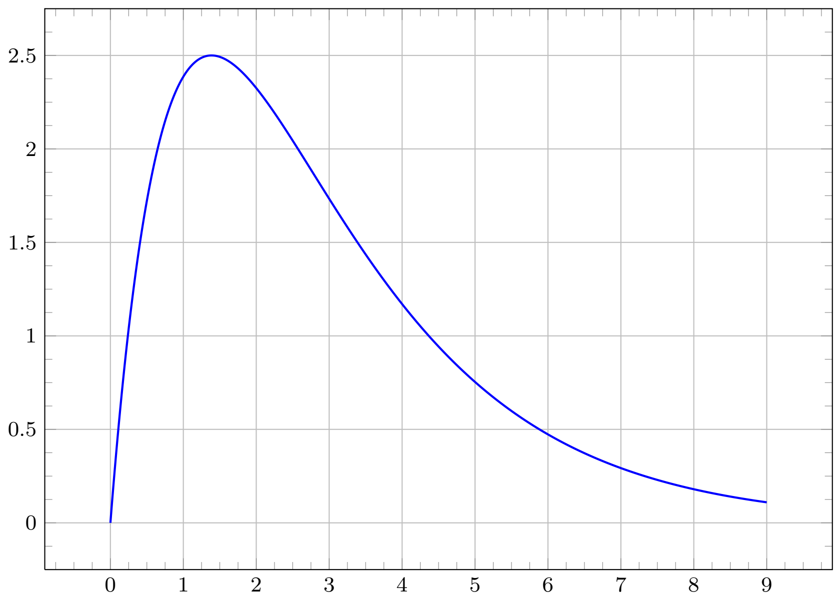
Préparation de la représentation graphique à l'aide d'une *esquisse*



Pour effectuer l'*échantillonnage* à l'aide de notre voyage 200, nous utiliserons les expressions auxiliaires

```
round(4*f(x),2) ⟶ y1(x)
tblStart = 0
Δtbl = 0.5
```

Voici enfin une représentation graphique de la fonction :



- Le code

```
NewProb
10*(e^(−1/2*t)−e^(−t)) ⟶ f(t)
d(f(t),t) ⟶ df(t)
solve(f(t)=0.75*2.5 and df(t)<0, t)
```

nous donne la valeur approchée $t \approx 2{,}77$.