Devoir I, 1

le 20 octobre 2009

Question 1

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (7i - 3)z^2 - (10 + 18i)z + 24 + 8i = 0$$

sachant qu'elle admet une racine *réelle*.

Question 2

Soit le polynôme P donné par

$$P(z) = z^3 + 5iz^2 - 2 \cdot (4 + i)z + 2 - 4i \quad (z \in \mathbb{C})$$

Montrez que P admet une racine *imaginaire pure* et calculez-la.

Question 3

1° Déterminez la *partie réelle* et la *partie imaginaire* du nombre complexe

$$z = (1 - i)^{12} \cdot (\sqrt{3} - 3i)$$

2° Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(i - 2) \cdot z = (2 - i)(2 + i) + z$.

3° Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 - \sqrt{2} \cdot (i - 1) = 0$.

Question 4

Soient

$$z_1 = \frac{3 + 7i}{2 - 5i}, \qquad z_2 = -\tfrac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)$$

Écrivez le nombre complexe

$$Z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

sous forme *algébrique* et sous forme *trigonométrique*.

Question 5

Soient les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot (1 - 5i) - 5 \cdot (5 + i)}{(2 - i)^3 + i}, \quad z_2 = -2\sqrt{3} + 4i, \quad z_3 = 2 + 2i$$

1° Écrivez z_1 sous forme algébrique.

2° Écrivez $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{z_3}$ sous forme *algébrique* et *trigonométrique*.

3° Déduisez-en les valeurs *exactes* de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

4° Calculez les *racines cubiques* de z_3, écrivez-les sous forme *trigonométrique* et portez dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les racines trouvées.

Répartition des points: 12+8+18+8+14 = 60.